JUL 27 1939

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 180

Heft 4

Ausgegeben am 24. Juni 1939

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1939

Band 180. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Rohrbach, Hans, Vereinfachter Beweis eines Identitätssatzes für Polynome . .	189
George, Erich, Ein Beitrag zur Theorie der geordneten Mengen	191
Kowalewski, Gerhard, Zur natürlichen Geometrie der irreduziblen G_7 von Berührungstransformationen	197
Jung, Heinrich W. E., Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. I. (Divisorenklassen)	219
Berichtigungen	244
Inhaltsverzeichnis der Bände 171—180	245

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Vereinfachter Beweis eines Identitätssatzes für Polynome.

Von *Hans Rohrbach* in Göttingen.

Der Hassesche Beweisansatz für die Riemannsche Vermutung über Kongruenzzetafunktionen im Falle eines algebraischen Funktionenkörpers vom Geschlechte $g > 1$, der dem Hasseschen Beweis für den Fall $g = 1$ nachgebildet ist, sieht u. a. den Nachweis der Identität zweier Polynome in einer Veränderlichen bei bestimmten Voraussetzungen vor. Den hierfür erforderlichen allgemeinen Satz habe ich in einer früheren Arbeit unter Heranziehung eines Satzes von C. W. Borchardt über Potenzsummen bewiesen [1]). Mein Beweis läßt sich aber, wie ich im folgenden zeigen will, durch eine einfache Bemerkung wesentlich abkürzen. Insbesondere kann man den Satz von Borchardt, bei dessen Anwendung eine unangenehme Fallunterscheidung notwendig ist, ganz vermeiden. Zugleich ergibt sich eine kleine Verschärfung. Eine Ergänzung liefert der Zusatz.

Um die Darstellung unabhängig von der Kenntnis der früheren Arbeit zu halten, führe ich den vereinfachten Beweis hier vollständig durch. Der Satz lautet:

Es seien $f(z)$ und $g(z)$ normierte Polynome von gleichem Grade m. Ferner seien $f_r(z)$ bzw. $g_r(z)$, $r = 1, 2, 3, \ldots$, die normierten Polynome, deren Nullstellen die r-ten Potenzen der Nullstellen von $f_1(z) \equiv f(z)$ bzw. $g_1(z) \equiv g(z)$ sind. Liegen dann die Nullstellen von $f(z)$ sämtlich im Innern oder sämtlich im Äußern des Einheitskreises und ist mit hinreichend großem N

$$f_r(1) = g_r(1) \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

so ist

$$f(z) \equiv g(z). \tag{2}$$

Es genügt hierbei,

$$N \geqq 2^{m+1} - 2 \tag{3}$$

zu wählen.

Beweis. 1. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Nullstellen von $f(z)$, $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_m'$ die Nullstellen von $g(z)$, je nach der Größe ihrer absoluten Beträge geordnet:

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_m|, \quad |\alpha_1'| \leqq |\alpha_2'| \leqq \cdots \leqq |\alpha_m'| .$$

Für $m = 1$ ist der Satz (sogar mit $N = 1$) richtig, denn für $f(z) = z - \alpha$, $g(z) = z - \alpha'$ folgt aus $1 - \alpha = 1 - \alpha'$ die Gleichheit von α und α'. Man nehme also an, der Satz sei für Polynome $(m-1)$-ten Grades bereits bewiesen.

Liegen dann die Nullstellen von $f(z)$ sämtlich etwa im Innern des Einheitskreises — anderenfalls ersetze man $f(z)$ durch $z^m f\left(\frac{1}{z}\right)$ und $g(z)$ durch $z^m g\left(\frac{1}{z}\right)$ —, so ist also

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_m| < 1 , \tag{4}$$

und es genügt für den Beweis von (2), zu zeigen, daß

$$\alpha_m = \alpha_m' \tag{5}$$

ist. Setzt man nämlich

$$f_r(z) = (z - \alpha_m^r)\, \varphi_r(z), \quad g_r(z) = (z - \alpha_m'^r)\, \psi_r(z) ,$$

so folgt aus (1), (4) und (5), daß mit hinreichend großem N

$$\varphi_r(1) = \psi_r(1) \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \ldots, N$$

[1]) H. Rohrbach, Ein Identitätssatz für Polynome, Journal für die reine und angew. Math. **177** (1937), S. 55—60.

ist. Daher stimmen $\varphi(z) \equiv \varphi_1(z)$ und $\psi(z) \equiv \psi_1(z)$ als Polynome $(m-1)$-ten Grades auf Grund der Induktionsvoraussetzung überein, mithin auch $f(z) = (z - \alpha_m)\,\varphi(z)$ und $g(z) = (z - \alpha_m)\,\psi(z)$.

2. Nach Definition ist

$$f_r(z) = \prod_{\mu=1}^{m} (z - \alpha_\mu^r), \qquad g_r(z) = \prod_{\mu=1}^{m} (z - \alpha_\mu'^r)\,,$$

also auf Grund der Bedingung (1)

$$(6) \qquad \prod_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu^r) = \prod_{\mu=1}^{m} (1 - \alpha_\mu'^r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, N).$$

Multipliziert man (wie es im früheren Beweis geschah) schon diese Beziehung aus, so erhält man links bzw. rechts die *alternierende* Summe der elementarsymmetrischen Funktionen der α_μ^r bzw. $\alpha_\mu'^r$. Das führt dann auf die eingangs genannte Fallunterscheidung. Um diese zu vermeiden, schließe man folgendermaßen weiter:

Man setze Gleichung (6) für $r = 2k$ und $r = k$ ($k \geqq 1$, ganz) an und dividiere die so erhaltenen Gleichungen durcheinander. Dann erhält man

$$\prod_{\mu=1}^{m} (1 + \alpha_\mu^k) = \prod_{\mu=1}^{m} (1 + \alpha_\mu'^k) \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]\right),$$

d. h.

$$(7) \quad \sum_{\mu} \alpha_\mu^k + \sum_{\mu<\nu} \alpha_\mu^k \alpha_\nu^k + \cdots + \alpha_1^k \alpha_2^k \cdots \alpha_m^k = \sum_{\mu} \alpha_\mu'^k + \sum_{\mu<\nu} \alpha_\mu'^k \alpha_\nu'^k + \cdots + \alpha_1'^k \alpha_2'^k \cdots \alpha_m'^k$$

für $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]$. Die hier für $k = 1$ auftretenden Produkte der α_μ zu je $\varkappa$ ohne Wiederholungen ($\varkappa = 1, 2, \ldots, m$) bezeichne man nun der Reihe nach mit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Ihre Anzahl ist

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m - 1 = n\,.$$

Analog seien $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n'$ mittels der α_μ' definiert. Dann besagt (7), daß *die ersten* $\left[\frac{N}{2}\right]$ *Potenzsummen der* β_ν *mit den ersten* $\left[\frac{N}{2}\right]$ *Potenzsummen der* β_ν' *übereinstimmen.*

3. Nach (3) ist nun

$$\left[\frac{N}{2}\right] \geqq 2^m - 1 = n\,.$$

Daher folgt aus den Newtonschen Formeln, daß die ersten n elementarsymmetrischen Funktionen der β_ν mit denen der β_ν', also auch die β_ν selbst in einer gewissen Reihenfolge mit den β_ν' übereinstimmen. Nach (4) gilt aber $|\beta_\nu| < 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$); also ist auch $|\beta_\nu'| < 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) und insbesondere

$$|\alpha_1'| \leqq |\alpha_2'| \leqq \cdots \leqq |\alpha_m'| < 1\,.$$

Es seien etwa i absolut größte unter den α_μ vorhanden. Dann kommen unter den α_μ', da die β_ν und β_ν' in ihrer Gesamtheit übereinstimmen, ebenfalls i absolut größte vor, und die Zahlen dieser beiden Teilsysteme zu je i müssen aus demselben Grunde sämtlich einander gleich sein. Bei geeigneter Numerierung ist insbesondere $\alpha_m = \alpha_m'$ und damit nach Teil 1 die Behauptung (2) bewiesen.

Zusatz. Der Satz gilt nicht mehr, wenn Nullstellen auf dem Einheitskreis oder zu beiden Seiten des Einheitskreises liegen. Haben nämlich $f(z)$ und $g(z)$ beide die Nullstelle 1, so ist (1) stets erfüllt, gleichgültig welche Nullstellen $f(z)$ und $g(z)$ sonst besitzen. Sind ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ beliebige komplexe Zahlen mit $\prod_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = 1$, ist $m > 2$ gerade und $f(z) = \prod_{\mu=1}^{m} (z - \alpha_\mu)$, $g(z) = \prod_{\mu=1}^{m} \left(z - \frac{1}{\alpha_\mu}\right)$, so ist $g_r(z) \equiv z^m f_r\left(\frac{1}{z}\right)$, also $g_r(1) = f_r(1)$ für alle $r = 1, 2, \ldots$, ohne daß $f(z)$ und $g(z)$ übereinzustimmen brauchen.

Eingegangen 31. August 1938.

Ein Beitrag zur Theorie der geordneten Mengen.

Von *Erich George* in Schneidemühl.

§ 1. Intervalle.

1. **Definition 1.** Eine Menge $\mathfrak{M}$, in der gewisse Paare (a_1, a_2) voneinander verschiedener Elemente durch eine Relation $a_1 < a_2$ ausgezeichnet sind, heißt *geordnet*, wenn die Relation *alternativ* und *transitiv* ist:

a) *Für je zwei voneinander verschiedene Elemente a_1 und a_2 aus $\mathfrak{M}$ gilt eine und nur eine der Relationen $a_1 < a_2$ und $a_2 < a_1$.*

b) *Aus $a_1 < a_2$ und $a_2 < a_3$ folgt $a_1 < a_3$.*

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren angegeben, das aus einer geordneten Menge weitere geordnete Mengen abzuleiten erlaubt.

2. Durch die Schreibweise $a_1 \leqq a_2$ bringt man folgende Aussage zum Ausdruck: *Es ist $a_1 < a_2$ oder $a_1 = a_2$.* Die Relationen $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3, \ldots, a_{n-1} < a_n$ faßt man zusammen zu $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Entsprechendes gilt, wenn ein Teil der Zeichen $<$ durch $\leqq$ ersetzt ist. Aus jeder der Relationen $a_1 < a_2 < a_3$, $a_1 \leqq a_2 < a_3$, $a_1 < a_2 \leqq a_3$ folgt $a_1 < a_3$, aus $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ dagegen nur $a_1 \leqq a_3$.

3. Ist $a < b$, so nennen wir die Menge i aller Elemente x, für die $a \leqq x \leqq b$ gilt, ein *Intervall von* $\mathfrak{M}$ und schreiben $i = b - a$. Wir nennen a bzw. b das *linke bzw. rechte Randelement*, die Menge aller übrigen Elemente aus i den *Kern* von i. Der Kern kann leer sein.

Wir bezeichnen künftig mit i, i', i_ν, i'_ν stets die Intervalle

$$b - a,\ b' - a',\ b_\nu - a_\nu,\ b'_\nu - a'_\nu, \quad \text{wo} \quad a < b,\ a' < b',\ a_\nu < b_\nu,\ a'_\nu < b'_\nu$$

vorausgesetzt wird.

4. **Definition 2.** *Wir schreiben:*

a) $i < i_1$ *statt* $a < b \leqq a_1 < b_1$.

b) $i > i_1$ *statt* $a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$.

c) $i \times i_1$ *statt* $a < a_1 < b < b_1$.

d) $i = i_1$ *statt* $a = a_1;\ b = b_1$.

Diese Beziehungen nennen wir *Lagebeziehungen*. Für zwei Intervalle i und i_1 gilt stets eine der Beziehungen $i < i_1$, $i_1 < i$, $i > i_1$, $i_1 > i$, $i \times i_1$, $i_1 \times i$. Im allgemeinen gilt auch *nur* eine von ihnen, nur die Aussagen $i > i_1$ und $i_1 > i$ können zugleich bestehen, nämlich für $i = i_1$.

Gilt $i > i_1$, so nennen wir i_1 ein *Unterintervall* von i. Wir sagen auch, i_1 sei *in* i *enthalten*, weil die Relation $i > i_1$ dann und nur dann gilt, wenn jedes Element aus i_1 in i enthalten ist. Ist c ein Element aus i, so schreiben wir $i > c$.

Zwei Intervalle i und i_1 heißen *fremd*, wenn $i < i_1$ oder $i_1 < i$ gilt, *verschränkt*, wenn $i \times i_1$ oder $i_1 \times i$ gilt.

5. Die einfachsten Eigenschaften der Intervalle folgen leicht aus den in Definition 1 geforderten Eigenschaften geordneter Mengen, z. B. die folgenden Tatsachen:

Satz 1. a) *Aus* $i < i_1$ *und* $i_1 < i_2$ *folgt* $i < i_2$.

b) *Aus* $i > i_1$ *und* $i_1 > i_2$ *folgt* $i > i_2$.

c) *Aus* $i < i_1$, $i > i'$, $i_1 > i'_1$ *folgt* $i' < i'_1$.

d) *Gilt* $i \times i_1$ *und* $i > i'$, *so gilt nicht* $i_1 \times i'$.

6. Die durch Definition 2a) festgelegte Relation $i < i_1$ ist nach Satz 1a) transitiv. Wendet man sie auf eine Menge paarweise fremder Intervalle an, so ist sie auch alternativ:

Satz 2. *Jede Menge paarweise fremder Intervalle wird durch die Definition* 2a) *geordnet.*

Aus Satz 1c) folgt:

Satz 3. *Ersetzt man jedes Intervall einer (durch Definition* 2a)) *geordneten Menge paarweise fremder Intervalle durch ein Unterintervall, so erhält man eine geordnete Menge paarweise fremder Intervalle.*

§ 2. Schachteln.

1. **Definition 3.** Eine unendliche Folge $F = i_1, i_2, \ldots$ von Intervallen heißt eine *Schachtel von* $\mathfrak{M}$, wenn jedes Intervall der Folge das nächste enthält.

Jedes i_ν heißt ein Intervall aus F. Mit F, F', F_ν, F'_ν bezeichnen wir stets Schachteln. Insbesondere sei stets $F = i_1, i_2, \ldots$ und $F' = i'_1, i'_2, \ldots$.

Entsteht eine Schachtel F_1 aus einer Schachtel F durch Streichung endlich oder unendlich vieler Intervalle, so nennen wir F_1 eine *Vergröberung* von F.

2. **Definition 4.** Es sei c ein Element aus $\mathfrak{M}$, i ein Intervall. Weiter seien F und F' Schachteln. Wir schreiben:

a) $F > c$ *bzw.* $F > i$, *wenn* $i_\nu > c$ *bzw.* $i_\nu > i$ *für alle* i_ν *aus* F.

b) $i > F$ *bzw.* $i < F$ *bzw.* $F < i$, *wenn* $i > i_\nu$ *bzw.* $i < i_\nu$ *bzw.* $i_\nu < i$ *für wenigstens ein* i_ν *aus* F.

c) $i \times F$ *bzw.* $F \times i$, *wenn* $i \times i_\nu$ *bzw.* $i_\nu \times i$ *für fast alle* i_ν *aus* F (*d. h. für alle mit endlich vielen Ausnahmen*).

d) $F > F'$, *wenn* $i_\nu > F'$ *für alle* i_ν *aus* F.

e) $F < F'$, *wenn* $i_\nu < i'_\mu$ *für wenigstens ein Zahlenpaar* (ν, μ).

f) $F \times F'$, *wenn* $i_\nu \times i'_\mu$ *für fast alle Zahlenpaare* (ν, μ).

Für zwei Schachteln F und F' gilt stets eine der *Lagebeziehungen*

$$F > F', \quad F' > F, \quad F < F', \quad F' < F, \quad F \times F', \quad F' \times F.$$

Im allgemeinen gilt auch nur eine von ihnen, doch können die Relationen $F > F'$ und $F' > F$ zugleich bestehen, selbst dann, wenn nicht $F = F'$ (d. h. $i_\nu = i'_\nu$ für jedes ν) ist.

Das Zeichen $>$ lesen wir auch hier als „enthält“. Gilt $F > F'$, so nennen wir F eine *Oberschachtel* von F', umgekehrt F' eine *Unterschachtel* von F. Zwei Schachteln F und F' heißen *fremd*, wenn $F < F'$ oder $F' < F$, *verschränkt*, wenn $F \times F'$ oder $F' \times F$ ist. Sie heißen *gleichwertig*, wenn jede von ihnen die andere enthält. Es ist z. B. jede Schachtel mit jeder ihrer Vergröberungen gleichwertig.

3. Man erhält leicht folgende Sätze:

Satz 4. *Ist* $i > F$ *bzw.* $i < F$ *bzw.* $F < i$, *so ist* $i > i_\nu$ *bzw.* $i_\nu < i$ *bzw.* $i < i_\nu$ *für fast alle* i_ν *aus* F.

Satz 5. *Aus* $i > F$ (*bzw.* $i < F$ *bzw.* $F < i$) *und* $F > F_1$ *folgt* $i > F_1$ (*bzw.* $i < F_1$ *bzw.* $F_1 < i$).

Satz 6. a) *Aus* $F < F_1$ *und* $F_1 < F_2$ *folgt* $F < F_2$.

b) *Aus* $F > F_1$ *und* $F_1 > F_2$ *folgt* $F > F_2$.

c) *Aus* $F < F_1$; $F > F'$; $F_1 > F_1'$ *folgt* $F' < F_1'$.

d) *Gilt* $F \times F_1$ *und* $F > F'$, *so gilt nicht* $F_1 \times F'$.

Satz 7. *Jede Menge paarweise fremder Schachteln wird durch Definition* 4e) *geordnet. Ersetzt man dann jede der Schachteln durch eine Unterschachtel, so erhält man wieder eine durch Definition* 4e) *geordnete Menge paarweise fremder Schachteln.*

4. Sind F und F' *gleichwertige* Schachteln, so ergeben sich aus den soeben genannten Sätzen folgende Tatsachen:

a) Aus $F > c$ bzw. $F > i$ folgt $F' > c$ bzw. $F' > i$.

b) Aus $i > F$ bzw. $i < F$ bzw. $F < i$ folgt $i > F'$ bzw. $i < F'$ bzw. $F' < i$.

c) Aus $F < F_1$ bzw. $F_1 < F$ folgt $F' < F_1$ bzw. $F_1 < F'$.

d) Aus $F > F_1$ bzw. $F_1 > F$ folgt $F' > F_1$ bzw. $F_1 > F'$.

e) Aus $F \times F_1$ bzw. $F_1 \times F$ folgt $F' \times F_1$ bzw. $F_1 \times F'$.

Diese Tatsachen lassen sich zusammenfassen in den

Satz 8. *In jeder Aussage über Lagebeziehungen zwischen Schachteln, Intervallen und Elementen darf man jede Schachtel durch jede gleichwertige ersetzen.*

§ 3. Spaltbare Schachtelmengen.

1. **Definition 5.** Eine Menge $\mathfrak{S}$ von Schachteln heißt *spaltbar*, wenn je zwei verschränkte Schachteln aus $\mathfrak{S}$ eine in $\mathfrak{S}$ enthaltene gemeinsame Oberschachtel besitzen.

Wir verstehen künftig unter $\mathfrak{S}$ *stets* eine spaltbare Schachtelmenge und bezeichnen ihre Schachteln mit kleinen Buchstaben f, f' usw.

2. **Definition 6.** *Für zwei Schachteln* f *und* f_1 *aus* $\mathfrak{S}$ *gelte* $f \sim f_1$, *wenn* $\mathfrak{S}$ *eine gemeinsame Oberschachtel von* f *und* f_1 *enthält.*

Die Beziehung $f \sim f_1$ gilt gewiß dann, wenn f und f_1 nicht fremde Schachteln sind. Sie kann aber auch dann gelten, wenn f mit f_1 fremd ist.

Satz 9. *Aus* $f \sim f_1$ *und* $f_1 \sim f_2$ *folgt* $f \sim f_2$.

Beweis. Es seien f_1' und f_1'' gemeinsame Oberschachteln aus $\mathfrak{S}$ von f und f_1 bzw. von f_1 und f_2. Dann enthalten f_1' und f_1'' die gleiche Schachtel f_1, sie sind also nicht fremd. Daher besitzen sie eine gemeinsame Oberschachtel f' aus $\mathfrak{S}$. Die Schachtel f' enthält f und f_2, also ist $f \sim f_2$.

3. Gilt $f \sim f_1$, so nennen wir f mit f_1 äquivalent. Die Beziehung zwischen äquivalenten Schachteln aus $\mathfrak{S}$ ist transitiv, reflexiv und symmetrisch, spaltet also $\mathfrak{S}$ in Klassen paarweise äquivalenter Schachteln. Diese Klassen nennen wir im folgenden A-*Klassen*. Wir bezeichnen sie mit kleinen griechischen Buchstaben, die Menge aller A-Klassen mit Σ.

Entnimmt man jeder A-Klasse eine Schachtel, so erhält man eine Menge paarweise fremder Schachteln, die sich durch Definition 4e) ordnen läßt. Dies führt zu der

Definition 7. *Sind* f *und* f_1 *Schachteln aus zwei verschiedenen* A-*Klassen* α *und* β *und ist* $f < f_1$, *so sei* $\alpha < \beta$.

Satz 10. *In bezug auf die durch Definition* 7 *festgelegte Beziehung ist* Σ *eine geordnete Menge.*

Beweis. Sind f und f_1 Schachteln aus verschiedenen A-Klassen α und β, so ist f mit f_1 fremd, es gilt also eine und nur eine der Relationen $f < f_1$ und $f_1 < f$. Wir nehmen an, es sei $f < f_1$. Weiter seien f' und f_1' zwei andere Schachteln aus α bzw. β. Dann gibt es eine gemeinsame Oberschachtel f'' aus α von f und f', ebenso eine gemeinsame Oberschachtel f_1'' aus β von f_1 und f_1'. Da f'' mit f_1'' fremd ist, so gilt eine der Relationen $f'' < f_1''$ und $f_1'' < f''$. Wegen Satz 6c) ist $f'' < f_1''$ und daher weiter $f' < f_1'$. Es gilt also eine und nur eine der Relationen $\alpha < \beta$ und $\beta < \alpha$.

Aus $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$ folgt $\alpha < \gamma$ wegen Satz 6a).

4. Spaltbare Schachtelmengen lassen sich auf vielfache, oft triviale Art angeben. Es ist z. B. jede Menge paarweise fremder Schachteln spaltbar, wobei jede der Schachteln für sich eine A-Klasse ist. Weniger triviale Beispiele erhält man, wenn man von $\mathfrak{S}$ weitere Eigenschaften verlangt, etwa daß jede Schachtel von $\mathfrak{M}$ wenigstens eine Schachtel aus $\mathfrak{S}$ enthält. Dann ist Σ stets abgeschlossen geordnet im Sinne der folgenden Definition.

Definition 8. Eine geordnete Menge heiße *abgeschlossen geordnet*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Bedingung I. *Jede Schachtel von $\mathfrak{M}$ enthält wenigstens ein Element aus $\mathfrak{M}$.*

Satz 11. *Enthält jede Schachtel von $\mathfrak{M}$ wenigstens eine Schachtel aus $\mathfrak{S}$, so ist Σ abgeschlossen geordnet.*

Beweis. Es sei $\varphi = J_1, J_2, \ldots$ eine Schachtel von Σ. Es ist also $J_\nu = \alpha_\nu'' - \alpha_\nu'$, wo α_ν' und α_ν'' verschiedene A-Klassen sind und

$$\alpha_\nu' \leqq \alpha_{\nu+1}' < \alpha_{\nu+1}'' \leqq \alpha_\nu'' \tag{1}$$

ist. Es ist zu zeigen, daß φ wenigstens eine A-Klasse enthält.

Sind fast alle α_ν' oder α_ν'' identisch gleich α, so ist α in φ enthalten. Wir nehmen also an, es seien weder fast alle α_ν' noch fast alle α_ν'' identisch. Wir können dann durch Streichung gewisser J_ν (Vergröberung von φ) erreichen, daß alle α_ν' und α_ν'' voneinander verschieden sind.

Aus α_ν' und α_ν'' wählen wir eine Schachtel f_ν' bzw. f_ν''. Da alle diese Schachteln paarweise fremd sind, so läßt sich durch Vergröberung der f_ν' und f_ν'' erreichen, daß schon ihre ersten Intervalle paarweise fremd sind. Wir bezeichnen diese ersten Intervalle mit $i_\nu' = b_\nu' - a_\nu'$ bzw. $i_\nu'' = b_\nu'' - a_\nu''$. Wegen (1) gilt

$$f_\nu' < f_{\nu+1}' < f_{\nu+1}'' < f_\nu'', \quad \text{also} \quad i_\nu' < i_{\nu+1}' < i_{\nu+1}'' < i_\nu'',$$

d. h.

$$a_\nu' < b_\nu' \leqq a_{\nu+1}' < b_{\nu+1}' \leqq a_{\nu+1}'' < b_{\nu+1}'' \leqq a_\nu'' < b_\nu'. \tag{2}$$

Hieraus folgt zunächst $a_\nu' < a_{\nu+1}' < a_{\nu+1}'' < a_\nu''$. Setzt man also $i_\nu = a_\nu'' - a_\nu'$, so ist $F = i_1, i_2, \ldots$ eine Schachtel. Sie enthält wenigstens eine Schachtel f aus $\mathfrak{S}$. Andererseits folgt aus (2), daß $a_\nu' < b_\nu' \leqq a_{\nu+1}' < a_{\nu+1}'' \leqq a_\nu'' < b_\nu''$, also $f_\nu' < F < f_\nu''$ ist. Dann ist auch $f_\nu' < f < f_\nu''$. Ist α die durch f bestimmte A-Klasse, so ist $\alpha_\nu' < \alpha < \alpha_\nu''$. Da dies für jedes ν gilt, so ist α in φ enthalten.

§ 4. Abschließende Bemerkungen.

1. Die rationalen Zahlen bilden eine geordnete Menge, wenn man durch $a < b$ zum Ausdruck bringt, daß $b - a$ eine positive Zahl ist. Diese Menge läßt sich, z. B. mit Hilfe von Intervallschachtelungen oder Dedekindschen Schnitten, zur Menge der reellen Zahlen erweitern. Die Methode Dedekinds ist von Hausdorff [1]) auf allgemeine geordnete Mengen übertragen worden. Entsprechendes haben wir hier für die Methode der Intervallschachtelungen (Schachteln) durchgeführt.

Nun definiert Hausdorff [2]) „Lücken“ in geordneten Mengen mit Hilfe von Schnitten. Wir definierten abgeschlossen geordnete Mengen mit Hilfe der Schachteln. Es liegt nahe,

---

[1]) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, 1. Aufl. 1914, S. 90ff. Wir beziehen uns im folgenden auf diese Auflage.

[2]) Wegen der im Text benutzten Begriffe Lücke, Stück, koinitial, konfinal, invers geordnet, Summe usw. vgl. Hausdorff, a. a. O. [1]), S. 71ff.

die abgeschlossen geordneten Mengen mit den geordneten Mengen ohne Lücken in Beziehung zu setzen.

Es ist leicht zu sehen, daß eine geordnete Menge ohne Lücken stets auch abgeschlossen geordnet ist. Umgekehrt besitzt eine abgeschlossen geordnete Menge $\mathfrak{M}$ gewiß keine Lücke, wenn folgende (in sehr allgemeinen Fällen geltende) Bedingung erfüllt ist:

Bedingung II. *Jedes Stück von $\mathfrak{M}$ enthält eine endliche oder abzählbare Teilmenge, die mit ihm koinitial und konfinal ist.*

Diese Bedingung ist z. B. dann gewiß erfüllt, wenn eine abzählbare Teilmenge von $\mathfrak{M}$ existiert, von der jedes Intervall von $\mathfrak{M}$ wenigstens ein Element enthält.

Ist aber die Bedingung II *nicht* erfüllt, so kann eine abgeschlossen geordnete Menge Lücken aufweisen. Es sei z. B. [3]) $\mathfrak{N}$ eine geordnete Menge, deren Ordnungstypus mit der Anfangszahl der dritten Zahlklasse in der Zählweise Cantors übereinstimmt, und $\mathfrak{N}^*$ eine zu $\mathfrak{N}$ invers geordnete Menge. Weiter sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}^*$ die Summe von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$. Dann besitzt $\mathfrak{M}$ eine Lücke zwischen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$. Andererseits ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen geordnet. In der Tat enthält offenbar eine Schachtel von $\mathfrak{M}$ wenigstens ein Element, wenn die Randelemente ihrer Intervalle fast alle entweder in $\mathfrak{N}$ oder in $\mathfrak{N}^*$ liegen. Eine Schachtel $i_1, i_2, \ldots$ von $\mathfrak{M}$ könnte also nur dann kein Element enthalten, wenn die linken Randelemente der i_ν sämtlich in $\mathfrak{N}$, die rechten in $\mathfrak{N}^*$ liegen würden und die Menge der linken Randelemente mit $\mathfrak{N}$ konfinal, die Menge der rechten Randelemente mit $\mathfrak{N}^*$ koinitial wäre. Nach Hausdorff [4]) ist aber der Ordnungstyp von $\mathfrak{N}$ eine reguläre Ordnungszahl, daher ist $\mathfrak{N}$ mit keiner abzählbaren Teilmenge konfinal. Es gibt also keine Schachtel der soeben geschilderten Art.

Der Begriff der abgeschlossen geordneten Menge umfaßt also den Begriff der geordneten Menge ohne Lücken, wenn er auch nur in recht allgemeinen Fällen über ihn hinausgeht.

2. Wir nennen eine Schachtel *konvergent*, wenn sie höchstens ein Element enthält. Dann gilt der

Satz 12. *Die Menge der konvergenten Schachteln einer geordneten Menge ist spaltbar.*

Beweis. Es seien $F = i_1, i_2, \ldots$ und $F' = i'_1, i'_2, \ldots$ verschränkte Schachteln. Es sei etwa $F \times F'$. Durch Vergröberungen läßt sich erreichen, daß $i_\nu \times i'_\mu$ für jedes Zahlenpaar (ν, μ). Das linke Randelement jedes i'_ν ist in F enthalten, ebenso das rechte Randelement jedes i_ν in F'. Wir nehmen an, F und F' seien konvergente Schachteln. Dann sind die linken Randelemente aller i'_ν identisch und gleich dem einzigen in F enthaltenen Element c. Ebenso sind die rechten Randelemente aller i_ν gleich dem einzigen in F' enthaltenen Element c'. Dann ist aber auch c in F' und c' in F enthalten. Nun ist $c \neq c'$. Dies ist ein Widerspruch, da keine der Schachteln F und F' mehr als ein Element enthalten sollte. Es sind also keine zwei konvergenten Schachteln verschränkt, daher ist die Menge der konvergenten Schachteln in trivialer Weise spaltbar.

3. Eine geordnete Menge, die kein Intervall mit leerem Kern besitzt, heißt *dicht geordnet.*

Ist $\mathfrak{M}$ eine dicht geordnete Menge, die der Bedingung II genügt, so enthält jede Schachtel von $\mathfrak{M}$ wenigstens eine konvergente Schachtel, nach Satz 11 ist also die durch die Menge $\mathfrak{S}$ der konvergenten Schachteln bestimmte Menge Σ abgeschlossen geordnet. Ist z. B. $\mathfrak{M}$ die Menge der der Größe nach geordneten rationalen Zahlen, so ist Σ der Menge der reellen Zahlen ähnlich.

---

[3]) Ich benutze hier einen freundlichen Hinweis von Herrn Prof. Dr. Haupt, Erlangen.

[4]) A. a. O. [1]), S. 131.

In dem eben angedeuten Beispiel erhalten wir nicht mehr, als sich auch mit Hilfe der Dedekindschen Schnitte erreichen läßt. Wir kommen zu allgemeineren Ergebnissen, wenn wir andere spaltbare Schachtelmengen benutzen.

In einer demnächst erscheinenden Arbeit über einen topologischen Stoff wird unser Verfahren auf einen solchen allgemeineren Fall angewendet werden. Es tritt dort als topologische Invariante eine geordnete Menge auf, mit der eine Schachtelmenge invariant verknüpft ist. Diese Schachtelmenge ist spaltbar, und zwar in nicht trivialer Weise insofern, als sie im allgemeinen tatsächlich verschränkte Schachteln enthält. Unser Verfahren liefert dann in der Menge der zugehörigen A-Klassen eine weitere Invariante.

Eingegangen 2. November 1938.

Zur natürlichen Geometrie der irreduziblen G_7 von Berührungstransformationen.

Von *Gerhard Kowalewski* in Dresden.

Lie hat gezeigt, daß es in der Ebene im wesentlichen drei irreduzible Gruppen von Berührungstransformationen gibt, eine zehngliedrige, eine siebengliedrige und eine sechsgliedrige, repräsentiert durch die Gruppe der Differentialgleichung $y_3 = 0$, und zwei Untergruppen von ihr [1]). Wir wollen uns hier mit der siebengliedrigen Gruppe beschäftigen und für sie eine natürliche Geometrie im Sinne Cesáros und Picks begründen.

Die Gruppe wird in ihrer kanonischen Gestalt von folgenden infinitesimalen Transformationen erzeugt:

$$p,\ \ q,\ \ xq + q_1,\ \ x^2q + 2xq_1,\ \ xp - y_1q_1,\ \ yq + y_1q_1,\ \ y_1p + \frac{1}{2}\,y_1^2q\,.$$

Die endliche Darstellung lautet:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = a_1x + a_2y_1 + a_3, \\ \mathfrak{y}_1 = b_1x + b_2y_1 + b_3, \\ \mathfrak{y} = (a_1b_2 - a_2b_1)y + \frac{1}{2}\,a_1b_1x^2 + a_2b_1xy_1 + \frac{1}{2}\,a_2b_2y_1^2 + a_1b_3x + a_2b_3y_1 + c. \end{cases}$$

Man kann ihr folgende Fassung geben:

$$(\mathrm{I}^*) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = a_1x + a_2y_1 + a_3, \\ \mathfrak{y}_1 = b_1x + b_2y_1 + b_3, \\ \mathfrak{y} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,y_1 & -\frac{1}{2}\,x & y - \frac{1}{2}\,xy_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + k. \end{cases}$$

Ordnet man jedem Linienelement $x,\ y,\ y_1$ den Raumpunkt

$$(1) \qquad X = x, \qquad Y = y_1, \qquad Z = y - \frac{1}{2}\,xy_1$$

zu, eine Abbildung, mit der auch Lie operiert, so entspricht der Gruppe (I*) die Gruppe aller räumlichen Affinitäten, welche das Nullsystem

$$(2) \qquad dZ + \frac{1}{2}\,(X\,dY - Y\,dX) = 0$$

in sich transformieren. Es wird nämlich vermöge (I)

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1 d\mathfrak{x} = (a_1b_2 - a_2b_1)(dy - y_1dx),$$

d. h. etwas anders geschrieben,

$$d\mathfrak{Z} + \frac{1}{2}\,(\mathfrak{X}d\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}d\mathfrak{X}) = (a_1b_2 - a_2b_1)\left(dZ + \frac{1}{2}\,(X\,dY - Y\,dX)\right).$$

[1]) Vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen **2**, Kap. 24.

Die Erweiterung von (I) auf die fünfte Ordnung führt zu folgenden Aufstellungen:

$$\mathfrak{y}_2 = \frac{b_1 + b_2 y_2}{a_1 + a_2 y_2}, \qquad \mathfrak{y}_3 = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) y_3}{(a_1 + a_2 y_2)^3},$$

$$\mathfrak{y}_4 = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) y_4}{(a_1 + a_2 y_2)^4} - \frac{3 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) y_3^2}{(a_1 + a_2 y_2)^5},$$

$$\mathfrak{y}_5 = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) y_5}{(a_1 + a_2 y_2)^5} - \frac{10 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) y_3 y_4}{(a_1 + a_2 y_2)^6} + \frac{15 a^2{}_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) y_3^3}{(a_1 + a_2 y_2)^7}.$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt

$$\mathfrak{y}_3 \mathfrak{y}_5 - \frac{5}{3} \mathfrak{y}_4^2 = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1 + a_2 y_2)^8} \left(y_3 y_5 - \frac{5}{3} y_4^2 \right).$$

Als *untere Differentialgleichungen* einer r-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen werden diejenigen invarianten Differentialgleichungen bezeichnet, deren Ordnung in dem Spielraum $3, \ldots, r-2$ liegt. Die vorliegende Gruppe hat offenbar zwei untere Differentialgleichungen, $y_3 = 0$ und $y_3 y_5 - \frac{5}{3} y_4^2 = 0$. Die Integralkurven sind im ersten Falle die Parabeln $y = ax^2 + bx + c$, im zweiten Falle die aus der semikubischen Parabel $y = x^{\frac{5}{2}}$ (whip-snake) hervorgehenden Kurven

$$y = a x^2 + b x + c + (A x + B)^{\frac{5}{2}}.$$

Es genügt, die semikubische Parabel allen Transformationen der Untergruppe p, q, $xq + q_1$, $x^2 q + 2xq_1$, $xp - y_1 q_1$ zu unterwerfen, um diese Kurven zu erhalten. Ebenso entstehen die Parabeln $y = ax^2 + bx + c$ aus $y = 0$ unter Einwirkung der Untergruppe q, xq, $x^2 q$.

Aus den für y_3 und $M = y_3 y_5 - \frac{5}{3} y_4^2$ gewonnenen Transformationsformeln

$$\mathfrak{y}_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\ (a_1 + a_2 y_2)^{-3} y_3,$$
$$\mathfrak{M} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 (a_1 + a_2 y_2)^{-8} M$$

läßt sich entnehmen

$$(3) \qquad \begin{cases} a_1 b_2 - a_2 b_1 = \dfrac{\mathfrak{y}_3^4 \mathfrak{M}^{-\frac{3}{2}}}{y_3^4 M^{-\frac{3}{2}}}, \\ a_1 + a_2 y_2 = \dfrac{\mathfrak{y}_3 \mathfrak{M}^{-\frac{1}{2}}}{y_3 M^{-\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Verbindet man die zweite Gleichung mit

$$d\mathfrak{x} = (a_1 + a_2 y_2) dx,$$

so tritt die Invarianteneigenschaft des Ausdrucks

$$(4) \qquad ds = y_3^{-1} M^{\frac{1}{2}} dx$$

zutage. Er wird als *Bogenelement* der Gruppe bezeichnet.

Differenziert man die erste der Gleichungen (3), so ergibt sich zunächst

$$\frac{d\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}} - \frac{8}{3} \frac{d\mathfrak{y}_3}{\mathfrak{y}_3} = \frac{dM}{M} - \frac{8}{3} \frac{dy_3}{y_3}$$

und nach Division durch

$$\mathfrak{y}_3^{-1} \mathfrak{M}^{\frac{1}{2}} d\mathfrak{x} = y_3^{-1} M^{\frac{1}{2}} dx$$

eine Gleichung, welche die Invarianteneigenschaft von

$$I = y_3 M^{-\frac{3}{2}} \frac{dM}{dx} - \frac{8}{3} y_4 M^{-\frac{1}{2}}$$

feststellt. Hiermit ist die niedrigste Differentialinvariante der Gruppe (I) gewonnen. Sie lautet in ausführlicher Schreibung:

$$I = \left(y_3^2 y_6 - 5\, y_3 y_4 y_5 + \frac{40}{9} y_4^3\right) M^{-\frac{3}{2}}. \tag{5}$$

Relativkoordinaten und Identitätsbedingungen.

Nichtsinguläre Kurvenelemente fünfter Ordnung sind solche, die keine der beiden unteren Differentialgleichungen $y_3 = 0$, $M = 0$ erfüllen. Als *Anfangselement* E_0 legen wir das nichtsinguläre Element

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = 0, \quad y_3^0 = 1, \quad y_4^0 = 0, \quad y_5^0 = 1$$

zugrunde. Um aus E_0 ein nichtsinguläres Element E oder

$$x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5$$

durch eine Transformation der Gruppe zu erhalten, muß man den Parametern in (1*) folgende Bedingungen auferlegen:

$$x = a_3, \quad y_1 = b_3, \quad y - \frac{1}{2} x y_1 = k,$$

$$y_2 = \frac{b_1}{a_1}, \quad y_3 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^3}, \quad y_4 = -\frac{3 a_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1^5},$$

$$y_5 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^5} + \frac{15 a_2^2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1^7}.$$

Hieraus oder noch einfacher aus (3) kann man zunächst schließen

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = y_3^4 M^{-\frac{3}{2}}, \quad a_1 = y_3 M^{-\frac{1}{2}}.$$

Weiter ergibt sich dann

$$b_1 = y_2 y_3 M^{-\frac{1}{2}}, \quad a_2 = -\frac{1}{3} y_3 y_4 M^{-1},$$

$$b_2 = \left(y_3^3 - \frac{1}{3} y_2 y_3 y_4\right) M^{-1}.$$

Die Parameter

$$a_1,\ a_2,\ a_3,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,$$
$$k$$

der überführenden Transformation, die durch $T_{E_0}^{E}$ symbolisiert wird, lauten also in geordneter Zusammenstellung:

$$y_3 M^{-\frac{1}{2}}, \quad -\frac{1}{3} y_3 y_4 M^{-1}, \quad x,$$

$$y_2 y_3 M^{-\frac{1}{2}}, \quad \left(y_3^3 - \frac{1}{3} y_2 y_3 y_4\right) M^{-1}, \quad y_1,$$

$$y - \frac{1}{2} x y_1.$$

Auf Grund dieser Feststellungen kann man mit Leichtigkeit die *Relativkoordinaten* u, v, v_1 eines Linienelements x^*, y^*, y_1^* in bezug auf das Element E berechnen. Es besteht nämlich die Beziehung [2])

$$(x^*, y^*, y_1^*) = (u, v, v_1)\, T_{E_0}^{E} \tag{6}$$

---

[2]) Vgl. z. B. G. Kowalewski, Allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen, Berlin 1931.

oder in ausführlicher Schreibung

$$x^* = uy_3 M^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} v_1 y_3 y_4 M^{-1} + x,$$

$$y_1^* = uy_2 y_3 M^{-\frac{1}{2}} + v_1\left(y_3^3 - \frac{1}{3} y_2 y_3 y_4\right) M^{-1} + y_1,$$

$$y^* - \frac{1}{2} x^* y_1^* = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} v_1 & -\frac{1}{2} u & v - \frac{1}{2} uv_1 \\ y_3 M^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{3} y_3 y_4 M^{-1} & x \\ y_2 y_3 M^{-\frac{1}{2}} & \left(y_3^3 - \frac{1}{3} y_2 y_3 y_4\right) M^{-1} & y_1 \end{vmatrix} + y - \frac{1}{2} xy_1.$$

Hieraus ergeben sich folgende Ausdrücke für u, v, v_1:

$$(7) \quad \begin{cases} u = y_3^{-1} M^{\frac{1}{2}}(x^* - x) + \frac{1}{3} y_3^{-3} y_4 M^{\frac{1}{2}}\{y_1^* - y_1 - y_2(x^* - x)\}, \\ v_1 = y_3^{-3} M\{y_1^* - y_1 - y_2(x^* - x)\}, \\ v = y_3^{-4} M^{\frac{3}{2}}\left\{y^* - y - y_1(x^* - x) - \frac{1}{2} y_2(x^* - x)^2\right\} \\ \quad + \frac{1}{6} y_3^{-6} y_4 M^{\frac{3}{2}}\{y_1^* - y_1 - y_2(x^* - x)\}^2. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke bauen sich auf aus y_3, y_4, M und aus

$$x^* - x = \alpha,$$

$$y^* - y - y_1(x^* - x) - \frac{1}{2} y_2(x^* - x)^2 = \beta,$$

$$y_1^* - y_1 - y_2(x^* - x) = \gamma.$$

Achtet man darauf, wie die infinitesimalen Transformationen der Gruppe auf die sechs Bausteine von u, v, v_1 einwirken, so ergibt sich, daß p, q, $xq + q_1$, $x^2 q + 2xq_1$ nichts an ihnen ändern. Die Einwirkung der drei übrigen infinitesimalen Transformationen ist folgende:

$$xp - y_1 q_1 \equiv -3y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} - 4y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} - 8M \frac{\partial f}{\partial M} + \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma},$$

$$yq + y_1 q_1 \equiv y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 2M \frac{\partial f}{\partial M} + \beta \frac{\partial f}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma},$$

$$y_1 p + \frac{1}{2} y_1^2 q \equiv -3y_3^2 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial f}{\partial \beta} + y_2\left(-3y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} - 4y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} - 8M \frac{\partial f}{\partial M} + \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma}\right).$$

Daß hierbei

$$u = y_3^{-1} M^{\frac{1}{2}} \alpha + \frac{1}{3} y_3^{-3} y_4 M^{\frac{1}{2}} \gamma,$$

$$v_1 = y_3^{-3} M \gamma,$$

$$v = y_3^{-4} M^{\frac{3}{2}} \beta + \frac{1}{6} y_3^{-6} y_4 M^{\frac{3}{2}} \gamma^2$$

invariant bleiben, läßt sich mit Leichtigkeit feststellen. Da die Relativkoordinaten Invarianten sein müssen, ist hiermit die Richtigkeit unserer Rechnungen bestätigt.

Wenn man zum Anfangselement E_0 übergeht, so reduzieren sich im Einklang mit (6) die Relativkoordinaten u, v, v_1 auf x^*, y^*, y_1^*. Sie sind, wie ich zu sagen pflege, auf

E_0 *geeicht.* Dasselbe sage ich von ds und I, die sich bei jenem Übergang in dx und y_6 verwandeln.

Nun kommen wir zur Aufstellung der *Identitätsbedingungen*, die das Hauptwerkzeug der natürlichen Geometrie bilden. Wir lassen das Bezugselement E längs einer Kurve variieren, während das Element x^*, y^*, y_1^*, um dessen Relativkoordinaten es sich handelt, mit sich identisch bleibt. Wenn man unter dieser Voraussetzung differenziert und du, dv, dv_1 mit ds vergleicht, so lautet das Ergebnis:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{ds} = -1 + \dfrac{1}{3}v_1 + \dfrac{1}{2}Iu, \\ \dfrac{dv_1}{ds} = -u + Iv_1, \\ \dfrac{dv}{ds} = -\dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{6}v_1^2 + \dfrac{3}{2}Iv. \end{cases}$$

Wenn man, anstatt u, v, v_1 getrennt zu betrachten, irgendeine Funktion $f(u, v, v_1)$ aus ihnen bildet, so lassen sich die Identitätsbedingungen in eine einzige Formel, die *Identitätsformel*, zusammenziehen. Diese hat folgendes Aussehen:

$$\frac{df}{ds} = -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\left(u^2\frac{\partial f}{\partial v} + 2u\frac{\partial f}{\partial v_1}\right) + \frac{1}{3}\left(v_1\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}v_1^2\frac{\partial f}{\partial v}\right) + I\left\{\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial f}{\partial u} - v_1\frac{\partial f}{\partial v_1}\right) + \frac{3}{2}\left(v\frac{\partial f}{\partial v} + v_1\frac{\partial f}{\partial v_1}\right)\right\}.$$

Bezeichnet man

$$\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial f}{\partial v},\quad u\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v_1},\quad u^2\frac{\partial f}{\partial v} + 2u\frac{\partial f}{\partial v_1},\quad u\frac{\partial f}{\partial u} - v_1\frac{\partial f}{\partial v_1},\quad v\frac{\partial f}{\partial v} + v_1\frac{\partial f}{\partial v_1},\quad v_1\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}v_1^2\frac{\partial f}{\partial v},$$

also die in u, v, v_1 geschriebenen infinitesimalen Transformationen der Gruppe, mit

$$W_1 f,\ W_2 f,\ W_3 f,\ W_4 f,\ W_5 f,\ W_6 f,\ W_7 f,$$

so lautet die Identitätsformel

$$(8^*)\qquad \frac{df}{ds} = -W_1 f - \frac{1}{2}W_4 f + \frac{1}{3}W_7 f + I\left(\frac{1}{2}W_5 f + \frac{3}{2}W_6 f\right).$$

Ich habe gezeigt [3]), wie man die Identitätsformel aufbauen kann, ohne die Ausdrücke der Relativkoordinaten zu kennen. Man muß für das Element E_0 die *Liesche Determinante* aufstellen. Die bis zur fünften Ordnung erweiterten infinitesimalen Transformationen der Gruppe lauten:

$$p,\ q,\ xq + q_1,\ x^2q + 2xq_1 + 2q_2,$$
$$xp - y_1q_1 - 2y_2q_2 - 3y_3q_3 - 4y_4q_4 - 5y_5q_5,$$
$$yq + y_1q_1 + y_2q_2 + y_3q_3 + y_4q_4 + y_5q_5,$$
$$y_1p + \frac{1}{2}y_1^2q - y_2^2q_2 - 3y_2y_3q_3 - (3y_3^2 + 4y_2y_4)q_4 - (10y_3y_4 + 5y_2y_5)q_5.$$

Bildet man die Liesche Determinante für das Element E_0, dessen Koordinaten alle bis auf $y_3^0 = y_5^0 = 1$ verschwinden, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

[3]) Vgl. z. B. G. Kowalewski, Integrationsmethoden der Lieschen Theorie, Berlin 1933, S. 173.

Man muß jetzt, um $\frac{df}{ds}$ zu erhalten, diese Determinante rändern, und zwar unten mit $1, y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0, y_5^0, I$, also mit 1, 0, 0, 1, 0, 1, I und rechts mit $W_1 f, \ldots, W_7 f$. Dann wird noch durch die Liesche Determinante, deren Wert hier 12 ist, dividiert. Das Ergebnis lautet:

$$\frac{df}{ds} = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_1 f \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_2 f \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_3 f \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & W_4 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -5 & W_5 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & W_6 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & W_7 f \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & I & 0 \end{vmatrix}.$$

Rechnet man die Determinante aus, so stellt sich die Formel (8*) ein, deren Richtigkeit damit bestätigt ist.

Die Schmiegungstransformation.

Wenn man auf der rechten Seite der Identitätsformel (8*) alle Zeichen umkehrt, so hat man nach einem allgemeinen Satze von mir die in Relativkoordinaten ausgedrückte *Schmiegungstransformation* vor sich. Ich belege mit diesem Namen diejenige Transformation der Gruppe, welche das Element E längs einer Kurve von der Stelle s nach der Stelle $s + ds$ bringt, also $x, y, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ die Inkremente

$$dx,\ y_1 dx,\ y_2 dx,\ y_3 dx,\ y_4 dx,\ y_5 dx,\ y_6 dx$$

erteilt, wobei dx durch

$$y_3^{-1}\left(y_3 y_5 - \frac{5}{3} y_4^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = ds$$

bestimmt ist. Daß $W_1 f + \frac{1}{2} W_4 f - \frac{1}{3} W_7 f - I\left(\frac{1}{2} W_5 f + \frac{3}{2} W_6 f\right)$ tatsächlich mit der Schmiegungstransformation zusammenfällt, kann man hier durch folgende Betrachtung bestätigen: Erweitert man auf die fünfte Ordnung, so ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\left(u^2 \frac{\partial f}{\partial v} + 2u \frac{\partial f}{\partial v_1} + 2 \frac{\partial f}{\partial v_2}\right)$$
$$- \frac{1}{3}\left\{v_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2} v_1^2 \frac{\partial f}{\partial v} - v_2^2 \frac{\partial f}{\partial v_2} - 3 v_2 v_3 \frac{\partial f}{\partial v_3} - (3 v_3^2 + 4 v_2 v_4) \frac{\partial f}{\partial v_4} - (10 v_3 v_4 + 5 v_2 v_5) \frac{\partial f}{\partial v_5}\right\}$$
$$- \frac{1}{2} I\left(u \frac{\partial f}{\partial u} + 3v \frac{\partial f}{\partial v} + 2 v_1 \frac{\partial f}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial v_2} - v_4 \frac{\partial f}{\partial v_4} - 2 v_5 \frac{\partial f}{\partial v_5}\right).$$

Nun stimmen die Relativkoordinaten von E in bezug auf E mit den kartesischen Koordinaten von E_0 überein. Sie lauten also:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 1, \quad v_4 = 0, \quad v_5 = 1.$$

Ihre Inkremente bei obiger Transformation sind folgende, wobei gemäß (8*) als Liesches δt das Bogenelement ds dient:

$$ds,\ 0,\ 0,\ ds,\ 0,\ ds,\ Ids.$$

Da $v_3^{-1}\left(v_3 v_5 - \frac{5}{3} v_4^2\right)^{\frac{1}{2}} du = ds$ hier mit du und I mit v_6 zusammenfällt, so sind dies tatsächlich die Größen

$$du,\ v_1 du,\ v_2 du,\ v_3 du,\ v_4 du,\ v_5 du,\ v_6 du.$$

Die infinitesimale Transformation, welche in der Identitatsformel als Faktor von I auftritt, hat nach einem allgemeinen Satze von mir die Eigenschaft, das in E steckende Element vierter Ordnung invariant zu lassen. Seine Relativkoordinaten in bezug auf E lauten 0, 0, 0, 0, 1, 0 und bringen die Faktoren von $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v_1}, \frac{\partial f}{\partial v_2}, \frac{\partial f}{\partial v_3}, \frac{\partial f}{\partial v_4}$ in $\frac{1}{2}W_5 f + \frac{3}{2}W_6 f$ zum Verschwinden. Diese infinitesimale Transformation ändert nur die letzte Koordinate von E, behandelt also E möglichst schonend. Daher nenne ich sie die zu E gehörige *Schonungstransformation*. Durch die Forderung, das in E steckende Element der um 1 niedrigeren Ordnung invariant zu lassen, ist sie zunächst nur bis auf einen Faktor bestimmt. Was in der Identitätsformel bei I steht, ist die *normierte Schonungstransformation*. Der genannte Faktor hat einen besonderen Wert erhalten.

Der Schmiegungstransformation

$$W^*f = W_1 f + \frac{1}{2}W_4 f - \frac{1}{3}W_7 f - \frac{I}{2}(W_5 f + 3W_6 f)$$

kann man eine lineare homogene Transformation zuordnen, indem man darauf achtet, wie W^*f auf die Transformationen

$$Wf = \Sigma\, e_r W_r f$$

einwirkt. Wf geht bei Anwendung von W^*f in $Wf + (WW^*)\delta t$ über, d. h. in

$$\Sigma\, e_r W_r f + \Sigma\, e_r (W_r W^*)\, \delta t. \tag{9}$$

In folgendem Verzeichnis sind die Klammerausdrücke $(W_r W_s)$ zusammengestellt, und zwar steht $(W_r W_s)$ in der r-ten Zeile und s-ten Spalte:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
0\,, & 0\,, & W_2 f\,, & 2W_3 f\,, & W_1 f\,, & 0\,, & 0 \\
0\,, & 0\,, & 0\,, & 0\,, & 0\,, & W_2 f\,, & 0 \\
-W_2 f\,, & 0\,, & 0\,, & 0\,, & -W_3 f\,, & W_3 f\,, & W_1 f \\
-2W_3 f\,, & 0\,, & 0\,, & 0\,, & -2W_4 f\,, & W_4 f\,, & 2W_5 f \\
-W_1 f\,, & 0\,, & W_3 f\,, & 2W_4 f\,, & 0\,, & 0\,, & -2W_7 f \\
0\,, & -W_2 f\,, & -W_3 f\,, & -W_4 f\,, & 0\,, & 0\,, & W_7 f \\
0\,, & 0\,, & -W_1 f\,, & -2W_5 f\,, & 2W_7 f\,, & -W_7 f\,, & 0.
\end{array}$$

Unter Benutzung dieser Tabelle findet man für $\Sigma\, e_r(W_r W^*)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&-e_3 W_2 f - 2e_4 W_3 f - e_5 W_1 f \\
&+\frac{1}{2}(2e_1 W_3 f + 2e_5 W_4 f - e_6 W_4 f - 2e_7 W_5 f) \\
&-\frac{1}{3}(e_3 W_1 f + 2e_4 W_5 f - 2e_5 W_7 f + e_6 W_7 f) \\
&-\frac{I}{2}(e_1 W_1 f - e_3 W_3 f - 2e_4 W_4 f + 2e_7 W_7 f) \\
&-\frac{3I}{2}(e_2 W_2 f + e_3 W_3 f + e_4 W_4 f - e_7 W_7 f).
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist in (9) einzusetzen. Ordnet man nach $W_1 f, \ldots, W_7 f$, so lassen sich die Inkremente der e leicht ablesen, und es stellt sich heraus, daß W^*f in der Mannigfaltigkeit aller Wf folgende Transformation bewirkt:

$$\begin{aligned}
E^*f = &\left(-\frac{I}{2}e_1 - \frac{1}{3}e_3 - e_5\right)\frac{\partial f}{\partial e_1} + \left(-\frac{3I}{2}e_2 - e_3\right)\frac{\partial f}{\partial e_2} \\
&+ (e_1 - Ie_3 - 2e_4)\frac{\partial f}{\partial e_3} + \left(-\frac{I}{2}e_4 + e_5 - \frac{1}{2}e_6\right)\frac{\partial f}{\partial e_4} \\
&+ \left(-\frac{2}{3}e_4 - e_7\right)\frac{\partial f}{\partial e_5} + \left(\frac{2}{3}e_5 - \frac{1}{3}e_6 + \frac{I}{2}e_7\right)\frac{\partial f}{\partial e_7}.
\end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung dieser Transformation E^*f lautet:

$$\begin{vmatrix} -\frac{I}{2}-\varrho & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3I}{2}-\varrho & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -I-\varrho & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{I}{2}-\varrho & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\varrho & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{I}{2}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(10) \qquad \varrho^2\left(\varrho+\frac{3I}{2}\right)\left(\varrho^2+\frac{3I}{2}\varrho+\frac{I^2}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\varrho^2-\frac{I^2}{4}+\frac{4}{3}\right)=0.$$

Diese Gleichung heißt bei Lie die *charakteristische Gleichung* von W^*f. Früher habe ich mit einer anderen Fassung dieses Begriffs gearbeitet. Ich schrieb die Schmiegungstransformation, wenn nötig unter Heranziehung überzähliger Koordinaten, in linearhomogener Form und bildete dann in der üblichen Weise die charakteristische Gleichung. Jetzt bevorzuge ich die Einführung von E^*f, was ein Zurückgreifen auf die adjungierte Gruppe bedeutet. Mein altes Verfahren würde im vorliegenden Falle in folgender Weise verlaufen. Man führt zunächst im Anschluß an (1) die Größen

$$X=u, \quad Y=v_1, \quad Z=v-\frac{1}{2}uv_1$$

ein, wodurch sich W^*f in

$$P-\frac{1}{2}YR+XQ-\frac{1}{3}YP-\frac{I}{2}(XP+2YQ+3ZR)$$

verwandelt. Geht man zu homogenen Koordinaten X, Y, Z, V über, so nimmt W^*f folgende Gestalt an:

$$VP-\frac{1}{2}YR+XQ-\frac{1}{3}YP-\frac{I}{2}(XP+2YQ+3ZR).$$

Die charakteristische Gleichung dieser neu eingekleideten Schmiegungstransformation lautet:

$$\begin{vmatrix} -\frac{I}{2}-\varrho & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & -I-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3I}{2}-\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(10') \qquad \varrho\left(\varrho+\frac{3I}{2}\right)\left(\varrho^2+\frac{3I}{2}\varrho+\frac{I^2}{2}+\frac{1}{3}\right)=0.$$

Alle hier auftretenden Faktoren erscheinen auch in (10), wo aber außerdem noch ϱ und $\varrho^2-\frac{I^2}{4}+\frac{4}{3}$ hinzutreten.

Singuläre I-Werte und singuläre Bahnkurven.

Singuläre I-Werte sind solche, die unter den Wurzeln der charakteristischen Gleichung (10) Zusammenrückungen mit sich bringen. Wenn I längs einer Kurve konstant bleibt, so liegt eine Bahnkurve der Gruppe vor. Im Falle eines singulären I-Wertes spreche ich von einer *singulären Bahnkurve.*

Die Vielfachheit der Wurzel 0 erhöht sich, wenn I einen der folgenden Werte hat:

$$0,\ \pm i\sqrt{\frac{2}{3}},\quad \pm\frac{4}{\sqrt{3}}. \tag{11}$$

Die Wurzel $-\frac{3I}{2}$ erlangt im Falle $I \neq 0$ nur dann eine höhere Vielfachheit, wenn $I = \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist. Es wäre noch zu prüfen, wann die beiden letzten Faktoren in (10) eine gemeinsame Wurzel haben. Man findet, daß dies nur im Falle $I = \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$ eintritt. Das Verzeichnis (11) gibt also die singulären I-Werte erschöpfend an. Wenn man für die Gleichung (10′) alle möglichen Zusammenrückungen der Wurzeln feststellt, kommt man zu genau denselben singulären I-Werten. In dieser Hinsicht leistet also mein altes Verfahren ebensoviel wie das neue.

Beschränken wir uns auf das Reelle, so gibt es nur drei Typen singulärer Bahnkurven, die den I-Werten $0, \frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}$ entsprechen.

Die durch E_0 hindurchgehende Bahnkurve $I = c$ wird dadurch gewonnen, daß man das System

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = 1 - \dfrac{1}{3}\,y_1 - \dfrac{c}{2}\,x, \\ \dfrac{dy_1}{ds} = x - cy_1, \\ \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{1}{2}\,x^2 - \dfrac{1}{6}\,y_1^2 - \dfrac{3}{2}\,cy \end{cases}$$

unter Benutzung der Anfangswerte 0, 0, 0 integriert.

Im Falle $I = 0$ handelt es sich um das System

$$\frac{dx}{ds} = 1 - \frac{1}{3}\,y_1, \qquad \frac{dy_1}{ds} = x, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{6}\,y_1^2.$$

Das Integrationsergebnis lautet:

$$x = \sqrt{3}\sin\frac{s}{\sqrt{3}}, \qquad y_1 = 3\left(1 - \cos\frac{s}{\sqrt{3}}\right),$$

$$y = -\frac{3}{2}s + 3\sqrt{3}\sin\frac{s}{\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\sin\frac{2s}{\sqrt{3}}.$$

Die zweite Gleichung steht im Einklang mit $y_1 = \frac{dy}{dx}$. Die durch E_0 hindurchgehende Bahnkurve $I = 0$ wird also dargestellt durch

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \sqrt{3}\sin\dfrac{s}{\sqrt{3}}, \\ y = -\dfrac{3}{2}s + 3\sqrt{3}\sin\dfrac{s}{\sqrt{3}} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin\dfrac{2s}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Wenn man die endliche Darstellung der Gruppe betrachtet, wie sie die Gleichungen (I) bieten, so erkennt man, daß die Punkttransformation

$$\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y - 3x$$

der Gruppe angehört. Die Parameter

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

haben hier die Werte

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3, \end{matrix}$$

c ist gleich Null.

Die Kurve (12) geht bei der obigen Transformation über in

$$\mathfrak{x} = \sqrt{3} \sin \frac{s}{\sqrt{3}}, \quad \mathfrak{y} = -\frac{3}{2} s - \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin \frac{2s}{\sqrt{3}}.$$

Da auch die Multiplikation von x und y mit konstanten Faktoren eine Transformation der Gruppe ist, so kann man die Kurve schließlich auf folgende Form bringen, wobei wir $t = \frac{s}{\sqrt{3}}$ setzen:

$$(12^*) \qquad x = 2 \sin t, \; y = 2t + \sin 2t.$$

Die kartesische Gleichung lautet:

$$y = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2}.$$

Man findet diese Kurve in dem grundlegenden Werk von Gino Loria [4]). Ihr Bild ist dort auf Tafel VI unter Nr. 64 zu sehen. Durch unsere Betrachtung wird die Kurve in ein völlig neues Licht gerückt und erscheint als Repräsentantin einer Klasse singulärer Bahnkurven der Gruppe (I) mit dem Merkmal $I = 0$.

Wendet man auf die Kurve (12*) alle Transformationen der Gruppe (I) an, so entstehen die ∞^6 Integralkurven der Differentialgleichung $I = 0$, die nach (5) in ausführlicher Schreibung folgendermaßen lautet:

$$y_3^2 y_6 - 5 y_3 y_4 y_5 + \frac{40}{9} y_4^3 = 0.$$

Bildet man für eine dieser ∞^6 Kurven, deren Gleichung etwa $y = f(x)$ sein mag, die Differentialkurve $z = f'(x)$, so genügt z der Differentialgleichung

$$z_2^2 z_5 - 5 z_2 z_3 z_4 + \frac{40}{9} z_3^3 = 0.$$

Das ist aber die Differentialgleichung der Kegelschnitte. Somit haben die singulären Bahnkurven $I = 0$ die Eigenschaft, daß ihre Differentialkurven Kegelschnitte sind. Z. B. ist die Differentialkurve von (12*) ein Kreis. Man hat nämlich

$$z = \frac{2(1 + \cos 2t)}{2 \cos t} = 2 \cos t,$$

also $x^2 + z^2 = 4$.

Die infinitesimale Transformation von (I), bei welcher die Kurve (12*) invariant bleibt, lautet wie folgt:

$$(13) \qquad 2q - \frac{1}{2}(x^2 q + 2x q_1) + y_1 p + \frac{1}{2} y_1^2 q.$$

---

[4]) G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven **2**, Leipzig 1910, S. 333.

Sie transformiert x und y_1 durch $y_1 p - x q_1$. Der Zuwachs von $y - \frac{1}{2} x y_1$ ist, wie man aus (13) ersieht, gleich $2\delta t$. Im Raume X, Y, Z, der durch die Abbildung (1) mit dem Inbegriff der Linienelemente x, y, y_1 zusammenhängt, entspricht also der Transformation (13) die Schraubung

$$(13') \qquad YP - XQ + 2R.$$

Diese Angabe bestätigt sich dadurch, daß aus (12*) folgt

$$X = 2 \sin t, \quad Y = 2 \cos t, \quad Z = 2t.$$

Das Abbild von (12*) im Raume ist also eine gewöhnliche Schraubenlinie und (13′) die zugehörige Schraubung.

Wir wollen jetzt noch die durch $I = \frac{4}{\sqrt{3}}$ gekennzeichneten singulären Bahnkurven besprechen. Soll eine solche Bahnkurve durch E_0 hindurchgelegt werden, so ist das System

$$\frac{dx}{ds} = 1 - \frac{1}{3} y_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} x,$$
$$\frac{dy_1}{ds} = x - \frac{4}{\sqrt{3}} y_1,$$
$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{3}} y$$

von den Anfangswerten 0, 0, 0 aus zu integrieren. Das Integrationsergebnis lautet:

$$x = \frac{4}{3\sqrt{3}}(1 - e^{-s\sqrt{3}}) - \frac{1}{3} s e^{-s\sqrt{3}},$$
$$y_1 = \frac{1}{3}(1 - e^{-s\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{3}} s e^{-s\sqrt{3}},$$
$$y = \frac{5}{36\sqrt{3}} - \left(\frac{4}{9\sqrt{3}} + \frac{s}{9}\right) e^{-s\sqrt{3}} + \left(\frac{11}{36\sqrt{3}} + \frac{5s}{18} + \frac{s^2}{6\sqrt{3}}\right) e^{-2s\sqrt{3}}.$$

Setzt man

$$x = -\frac{4}{3\sqrt{3}} \mathfrak{x} - \frac{1}{3} \mathfrak{y}_1 + \frac{4}{3\sqrt{3}},$$
$$y_1 = -\frac{1}{3} \mathfrak{x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathfrak{y}_1 + \frac{1}{3},$$
$$y = \frac{1}{3} \mathfrak{y} + \frac{2}{9\sqrt{3}} \mathfrak{x}^2 + \frac{1}{9} \mathfrak{x}\mathfrak{y}_1 + \frac{1}{6\sqrt{3}} \mathfrak{y}_1^2 - \frac{4}{9\sqrt{3}} \mathfrak{x} - \frac{1}{9} \mathfrak{y}_1 + \frac{5}{36\sqrt{3}},$$

so ist dies, wie der Vergleich mit (I) zeigt, eine Transformation der Gruppe. Sie verwandelt die gewonnene Kurve in

$$\mathfrak{x} = e^{-s\sqrt{3}}, \quad \mathfrak{y}_1 = s e^{-s\sqrt{3}}, \quad \mathfrak{y} = \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{s}{2}\right) e^{-2s\sqrt{3}}.$$

Man bestätigt, daß $\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}$ mit $\mathfrak{y}_1$ übereinstimmt. Schließlich kann man noch $s\sqrt{3} + \frac{1}{2} = -t$ setzen und gewisse konstante Faktoren zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ schlagen, so daß die Kurve durch $x = e^t$, $y = te^{2t}$ dargestellt wird und folgende kartesische Gleichung hat:

$$(14) \qquad y = x^2 \ln x.$$

Setzt man in (8) die Werte $y_3 = 2x^{-1}$, $y_4 = -2x^{-2}$, $y_5 = 4x^{-3}$, $y_6 = -12x^{-4}$ ein, so ergibt sich $I = -\frac{4}{\sqrt{3}}$. Das Minuszeichen kommt daher, daß wir uns hinsichtlich der Faktoren, die wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gaben, volle Freiheit ließen. Wenn man y in $-y$ verwandelt, geht offenbar I in $-I$ über. Streng genommen sollten wir uns an die Bedingung $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$ halten. Doch ist das von untergeordneter Bedeutung.

Wir wollen auch hier aus der Gruppe die infinitesimale Transformation heraussuchen, welche die Kurve (14) in sich überführt. Sie lautet:

$$(15) \qquad (x^2 q + 2x q_1) + xp + 2yq + y_1 q_1$$

und ist die Erweiterung der Punkttransformation $xp + (2y + x^2)q$.

Im Raume entspricht der Transformation (15)

$$(15') \qquad XP + YQ + 2ZR + 2XQ$$

und der Kurve (14) die folgende:

$$(14') \qquad Y = 2X \ln X + X, \quad Z = -\frac{1}{2} X^2.$$

Führt man die Transformation

$$\mathfrak{x} = X, \quad \mathfrak{y} = Y - X, \quad \mathfrak{z} = Z$$

aus, die nach (I) hier zulässig ist, so erscheint (14′) in der einfacheren Gestalt

$$(14^*) \qquad \mathfrak{y} = 2\mathfrak{x} \ln \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{z} = -\frac{1}{2} \mathfrak{x}^2.$$

Über die Integration des Systems (*) sei noch folgendes bemerkt. Aus $dy = y_1 dx$ ergibt sich auf Grund von (*) im Falle $c \neq 0$

$$(**) \qquad y = \frac{1}{3c}\left(x^2 + \frac{1}{3} y_1^2 - 2y_1\right) + \frac{1}{3} x y_1.$$

Dieses y erfüllt die dritte Gleichung (*), sobald x und y_1 den beiden ersten Gleichungen genügen. Man kann also die dritte Gleichung (*) durch $dy = y_1 dx$ ersetzen und hat dann $y = \int y_1 dx$. Dieses Integral braucht man aber nicht einmal zu berechnen. Es ist durch Gleichung (**) bereits gegeben.

Gruppe (I) als Erweiterung der ebenen Affingruppe.

In diesem Zusammenhang sei noch eine Bemerkung über die Gruppe (I) gemacht. Sie ist, wenn man mit Lie statt x, y_1, y die Bezeichnungen x, y, z verwendet [5]), als *Erweiterung* der Affingruppe

$$\mathfrak{x} = a_1 x + a_2 y + a_3,$$
$$\mathfrak{y} = b_1 x + b_2 y + b_3$$

aufzufassen, und zwar kommt diese besondere Erweiterung dadurch zustande, daß man beachtet, wie die Affingruppe auf das Integral $z = \int y dx$ einwirkt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} = \int \mathfrak{y} d\mathfrak{x} &= \int (b_1 x + b_2 y + b_3)(a_1 dx + a_2 dy) \\ &= a_1 b_1 \int x dx + a_1 b_2 \int y dx + a_1 b_3 \int dx \\ &\quad + a_2 b_1 \int x dy + a_2 b_2 \int y dy + a_2 b_3 \int dy . \end{aligned}$$

Bedenkt man, daß

$$\int x dy = xy - \int y dx = xy - z$$

[5]) Vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen **2**, Kap. 23.

ist, so lautet das Ergebnis:

$$\mathfrak{z} = a_1 b_1 \frac{x^2}{2} + a_1 b_2 z + a_1 b_3 x + a_2 b_1 (xy - z) + a_2 b_2 \frac{y^2}{2} + a_2 b_3 y + c.$$

Das ist bis auf die andere Bezeichnungsweise die dritte Gleichung (I).

Wenn man bei der räumlichen Affingruppe

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4, \\ \mathfrak{y} &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4, \\ \mathfrak{z} &= c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 \end{aligned}$$

eine ähnliche Erweiterung vornimmt, kommt man auf eine 15-gliedrige Gruppe in sechs Veränderlichen. Achtet man darauf, wie die räumliche Affingruppe auf die drei Integrale

$$X = \int (z dy - y dz), \quad Y = \int (x dz - z dx), \quad Z = \int (y dx - x dy)$$

einwirkt, so findet man

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_4(b_1 x + b_2 y + b_3 z) - b_4(c_1 x + c_2 y + c_3 z) + a, \\ \mathfrak{Y} &= \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} + a_4(c_1 x + c_2 y + c_3 z) - c_4(a_1 x + a_2 y + a_3 z) + b, \\ \mathfrak{Z} &= \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + b_4(a_1 x + a_2 y + a_3 z) - a_4(b_1 x + b_2 y + b_3 z) + c. \end{aligned}$$

Die infinitesimalen Transformationen der hier gewonnenen Gruppe lauten:

$$\begin{array}{lll} p + zQ - yR, & q + xR - zP, & r + yP - xQ, \\ xp + YQ + ZR, & yp - XQ, & zp - XR, \\ xq - YP, & yq + ZR + XP, & zq - YR, \\ xr - ZP, & yr - ZQ, & zr + XP + YQ, \\ & P, \quad Q, \quad R. & \end{array}$$

Die Gruppe läßt das Pfaffsche System

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} dX + y dz - z dy = 0, \\ dY + z dx - x dz = 0, \\ dZ + x dy - y dx = 0 \end{cases}$$

invariant. Mit obigem System habe ich mich in einer meiner ältesten Arbeiten beschäftigt[6]). Ich fand damals, daß es eine 21-gliedrige Gruppe gestattet, die außer den oben verzeichneten infinitesimalen Transformationen noch sechs andere enthält. Man kann diese hinzutretenden Transformationen unter Einführung der Abkürzungen

$$\varphi = xp + yq + zr + XP + YQ + ZR$$

und

$$\omega = xX + yY + zZ$$

in folgender Form schreiben:

$$\begin{array}{lll} \varphi X - \omega p, & \varphi Y - \omega q, & \varphi Z - \omega r, \\ \varphi x - \omega P + Zq - Yr, & \varphi y - \omega Q + Xr - Zp, & \varphi z - \omega R + Yp - Xq. \end{array}$$

---

[6]) G. Kowalewski, Über Systeme von Pfaffschen Gleichungen mit einer primitiven Transformationsgruppe. Leipziger Berichte 1899, S. 265—295.

Unter den 21 hier verzeichneten Symbolen und ihren linearen Verbindungen gibt es solche, die bei Vertauschung der großen und kleinen lateinischen Buchstaben ungeändert bleiben, wobei das Hinzutreten eines konstanten Faktors als belanglos zu betrachten ist. Von dieser Art sind die Verbindungen

$$(xp - yq) - (XP - YQ), \quad (xp - zr) - (XP - ZR).$$

Dann gibt es solche, die bei jener Vertauschung ausgewechselt werden, wie

$$\begin{aligned} xq - YP, &\quad yp - XQ, \\ xr - ZP, &\quad zp - XR, \\ yr - ZQ, &\quad zq - YR, \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} P + \varphi x - \omega P + Zq - Yr, &\quad p + \varphi X - \omega p + zQ - yR, \\ Q + \varphi y - \omega Q + Xr - Zp, &\quad q + \varphi Y - \omega q + xR - zP, \\ R + \varphi z - \omega R + Yp - Xq, &\quad r + \varphi Z - \omega r + yP - xQ. \end{aligned}$$

Diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine vierzehngliedrige Gruppe, die jedes der beiden Pfaffschen Systeme

$$\begin{aligned} dX + ydz - zdy = 0, \\ dY + zdx - xdz = 0, \\ dZ + xdy - ydx = 0, \end{aligned} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} dx + YdZ - ZdY = 0, \\ dy + ZdX - XdZ = 0, \\ dz + XdY - YdX = 0 \end{aligned} \right.$$

in sich überführt. Die 21-gliedrige und die 14-gliedrige Gruppe sind beide primitiv und unter den primitiven Gruppen in sechs Veränderlichen die einzigen, die ein System von mehreren Pfaffschen Gleichungen invariant lassen (vgl. hierüber meine oben zitierte Arbeit [6]).

Man kann das hier dargelegte Erweiterungsverfahren zweimal nacheinander anwenden. Wenn man bei der ebenen Affingruppe nicht $\int ydx$, sondern, was nur eine unwesentliche Änderung bedeutet, $Z = \int (ydx - xdy)$ adjungiert, so erhält man folgende Untergruppe der räumlichen Affingruppe:

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = a_1 x + a_2 y + a_3, \quad \mathfrak{y} = b_1 x + b_2 y + b_3, \\ \mathfrak{Z} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) Z + (a_1 b_3 - b_1 a_3) x + (a_2 b_3 - b_2 a_3) y + c. \end{cases}$$

Nun adjungiert man noch

$$X = \int (Zdy - ydZ), \quad Y = \int (xdZ - Zdx).$$

Dann schließen sich an (16) zwei Gleichungen an, in denen wir die Abkürzung $(a_1 b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ benutzt haben:

$$(16') \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = (a_1 b_2)(b_2 X - b_1 Y - 2 b_3 Z) - b_3^2 (a_1 x + a_2 y) + (a_3 b_3 + c)(b_1 x + b_2 y) + a, \\ \mathfrak{Y} = (a_1 b_2)(-a_2 X + a_1 Y + 2 a_3 Z) + (a_3 b_3 - c)(a_1 x + a_2 y) - a_3^2 (b_1 x + b_2 y) + b. \end{cases}$$

Die infinitesimalen Transformationen der durch (16), (16′) dargestellten Gruppe lauten, wie folgt:

$$\begin{aligned} P, \quad Q, \quad yP - xQ + R, \\ p + 2ZQ - yR, \quad q - 2ZP + xR, \\ xp + XP + 2YQ + ZR, \quad yq + 2XP + YQ + ZR, \\ yp - XQ, \quad xq - YP. \end{aligned}$$

Diese neungliedrige Gruppe läßt das Pfaffsche System

$$(\dagger\dagger) \qquad \begin{cases} dX + ydZ - Zdy = 0, \\ dY + Zdx - xdZ = 0, \\ dZ + xdy - ydx = 0 \end{cases}$$

invariant. Es entsteht aus dem System (†) dadurch, daß man z und Z zusammenfallen läßt. Das System (††) gestattet, wie Engel als erster feststellte, eine 14-gliedrige Gruppe.

Man kann sie aus der 21-gliedrigen Gruppe des Systems (†) dadurch herausschälen, daß man die Invarianz der Gleichung $Z - z = 0$ fordert.

Notiert man die Inkremente von $Z - z$ für die 21 Grundtransformationen der erwähnten Gruppe, so ergibt sich, daß sie der Reihe nach lauten:

$$-y,\ x,\ -1,\ Z,\ 0,\ -X,\ 0,\ Z,\ -Y,\ -x,\ -y,\ -z,\ 0,\ 0,\ 1$$
$$X(Z-z),\quad Y(Z-z),\quad Z(Z-z)+\omega,\quad x(Z-z)+Y,\quad y(Z-z)-X,\quad z(Z-z)-\omega.$$

Nun muß man aus diesen Inkrementen alle linearen Verbindungen herstellen, die durch die Einsetzung $Z = z$ zum Verschwinden gebracht werden. Für die Faktoren einer solchen linearen Verbindung ergeben sich folgende sieben Bedingungen:

$$c_1 = -c_{11},\quad c_2 = c_{10},\quad c_3 = c_{15},\quad c_4 + c_8 = c_{12},$$
$$c_6 = -c_{20},\quad c_9 = c_{19},\quad c_{18} = c_{21}.$$

Die so gewonnene Untergruppe lautet:

$$p + (Z+z)Q - y(R+r),\quad q - (Z+z)P + x(R+r),\quad R + r + yP - xQ,\quad P,\quad Q,$$
$$xp + zr + XP + 2YQ + ZR,\quad yq + zr + 2XP + YQ + ZR,\quad yp - XQ,\quad xq - YP,$$
$$(Z+z)p - X(R+r) - \varphi y + \omega Q,\quad (Z+z)q - Y(R+r) + \varphi x - \omega P,$$
$$\varphi X - \omega p,\quad \varphi Y - \omega q,\quad \varphi(Z+z) - \omega(R+r) + Yp - Xq.$$

Um die Gruppe des Systems (††) zu finden, muß man die mit r behafteten Glieder fortlassen und z durch Z ersetzen. Dadurch erhält man:

$$p + 2ZQ - yR,\quad q - 2ZP + xR,\quad R + yP - xQ,\quad P,\quad Q,$$
$$xp + XP + 2YQ + ZR,\quad yq + 2XP + YQ + ZR,\quad yp - XQ,\quad xq - YP,$$
$$2Zp - XR - \overline{\varphi} y + \overline{\omega} Q,\quad 2Zq - YR + \overline{\varphi} x - \overline{\omega} P,$$
$$\overline{\varphi} X - \overline{\omega} p,\quad \overline{\varphi} Y - \overline{\omega} q,\quad 2\overline{\varphi} Z - \overline{\omega} R + Yp - Xq.$$

Hierbei ist $\overline{\varphi} = xp + yq + XP + YQ + ZR$ und $\overline{\omega} = xX + yY + Z^2$. Auch diese Gruppe ist primitiv.

Anstatt, wie es oben geschah, zuerst $Z = \int (y\,dx - x\,dy)$ und dann

$$X = \int (Z\,dy - y\,dZ),\qquad Y = \int (x\,dZ - Z\,dx)$$

in den Kreis der Veränderlichen aufzunehmen, kann man es auch so machen, daß man beide Schritte zusammenfaßt und die Einwirkung der (x, y)-Affingruppe auf die drei Integrale

$$U = \int y\,dx,\qquad V = \int xy\,dx,\qquad W = \int y^2\,dx$$

beobachtet. Diese Integrale hängen mit X, Y, Z in einfacher Weise zusammen. Es ist nämlich

$$\int (y\,dx - x\,dy) = -xy + 2\int y\,dx,$$
$$\int (Z\,dy - y\,dZ) = Zy - 2\int y\,dZ = Zy - 2\int y^2\,dx + 2\int xy\,dy,$$
$$\int (x\,dZ - Z\,dx) = -Zx + 2\int x\,dZ = -Zx + 2\int xy\,dx - 2\int x^2\,dy$$

und

$$\int xy\,dy = \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}\int y^2\,dx,$$
$$\int x^2\,dy = x^2 y - 2\int xy\,dx,$$

mithin

$$U = \frac{1}{2}(Z + xy),\qquad V = \frac{1}{6}(Y + Zx + 2x^2 y),\qquad W = \frac{1}{3}(-X + Zy + xy^2).$$

Man kann diese Erweiterung der (x, y)-Affingruppe fortsetzen durch Hinzunahme der Integrale

$$\int x^2 y dx, \quad \int xy^2 dx, \quad \int y^3 dx.$$

Wenn man noch den nächsten Schritt machen will, so kommen die Integrale

$$\int x^3 y dx, \quad \int x^2 y^2 dx, \quad \int xy^3 dx, \quad \int y^4 dx$$

an die Reihe u. s. f.

Die Begleittransformationen des Elements *E*.

Wir kehren zur Betrachtung der Gruppe (I) zurück. Die Identitätsformel (8*) gibt uns die in Relativkoordinaten ausgedrückte Schmiegungstransformation. Schreibt man (8*) in der Form

$$\frac{df}{ds} = W_{\mathrm{I}} f + I W_{\mathrm{II}} f,$$

so ist $-W_{\mathrm{I}} f - I W_{\mathrm{II}} f$ die Schmiegungstransformation. $W_{\mathrm{II}} f$ wurde oben als die zu E gehörige *normierte Schonungstransformation* bezeichnet. Sie ist mit E invariant verknüpft. Dasselbe gilt von $W_{\mathrm{I}} f$. Ebenso ist $W_{\mathrm{III}} f = (W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{II}})$ mit E invariant verknüpft. $W_{\mathrm{I}} f$, $W_{\mathrm{II}} f$, $W_{\mathrm{III}} f$ nenne ich die ersten drei Begleittransformationen von E. Nach einem allgemeinen Satze von mir erhält man aus $W_{\mathrm{I}} f$ und $W_{\mathrm{II}} f$ durch fortgesetzte Anwendung der Klammeroperation die ganze Gruppe (I). Hierdurch wird die Möglichkeit geboten, die begonnene Numerierung weiter fortzusetzen.

Im Falle der Gruppe (I) ist nach (8*)

$$W_{\mathrm{I}} f = -W_1 f - \frac{1}{2} W_4 f + \frac{1}{3} W_7 f,$$

$$W_{\mathrm{II}} f = \frac{1}{2} W_5 f + \frac{3}{2} W_6 f.$$

Nach der auf Seite 203 gegebenen Tabelle aller $(W_r W_s)$ folgt hieraus

$$W_{\mathrm{III}} f = (W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{II}}) = -\frac{1}{2} W_1 f - \frac{1}{4} W_4 f - \frac{1}{6} W_7 f.$$

Es zeigt sich, daß man durch fortgesetztes Klammern mit $W_{\mathrm{I}} f$ die ganze Gruppe findet. Man hat nämlich

$$W_{\mathrm{IV}} f = (W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{III}}) = \frac{1}{3} W_5 f,$$

$$W_{\mathrm{V}} f = (W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{IV}}) = -\frac{1}{3} W_1 f + \frac{1}{3} W_4 f + \frac{2}{9} W_7 f,$$

$$W_{\mathrm{VI}} f = (W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{V}}) = -W_3 f - \frac{4}{9} W_5 f,$$

$$W_{\mathrm{VII}} f = (W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{VI}}) = \frac{7}{9} W_1 f + W_2 f - \frac{4}{9} W_4 f - \frac{8}{27} W_7 f.$$

Die sieben infinitesimalen Transformationen der Gruppe lassen sich also in folgender Form schreiben:

$$(W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{II}}), \quad (W_{\mathrm{I}}(W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{II}})), \quad (W_{\mathrm{I}}(W_{\mathrm{I}}(W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{II}}))), \ldots$$

$W_{\mathrm{I}} f$ nenne ich die *aufbauende Transformation* der Gruppe. Es ist von Interesse, $(W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{VII}})$ durch $W_{\mathrm{I}}, \ldots, W_{\mathrm{VII}}$ auszudrücken. Man findet

$$(W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{VII}}) = \frac{5}{3} W_3 f + \frac{16}{27} W_5 f,$$

also

$$(W_{\mathrm{I}} W_{\mathrm{VII}}) = -\frac{4}{9} W_{\mathrm{IV}} f - \frac{5}{3} W_{\mathrm{VI}} f.$$

Hiernach kann man die Einwirkung von $W_{\mathrm{I}} f$ auf die infinitesimalen Transformationen $Wf = e_1 W_{\mathrm{I}} f + \cdots + e_7 W_{\mathrm{VII}} f$ bestimmen. Wf geht über in $Wf + (WW_{\mathrm{I}})\,\delta t$. Da

$$(W_{\mathrm{I}} W) = e_2 W_{\mathrm{III}} f + e_3 W_{\mathrm{IV}} f + e_4 W_{\mathrm{V}} f + e_5 W_{\mathrm{VI}} f + e_6 W_{\mathrm{VII}} f - e_7\left(\frac{4}{9} W_{\mathrm{IV}} f + \frac{5}{3} W_{\mathrm{VI}} f\right)$$

ist, so vollzieht sich in $e_1, \ldots, e_7$ die infinitesimale Transformation

$$E_{\mathrm{I}} f = -e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3} - \left(e_3 - \frac{4}{9} e_7\right) \frac{\partial f}{\partial e_4} - e_4 \frac{\partial f}{\partial e_5} - \left(e_5 - \frac{5}{3} e_7\right) \frac{\partial f}{\partial e_6} - e_6 \frac{\partial f}{\partial e_7}.$$

An Hand der Tabelle aller Klammerausdrücke $(W_r W_s)$ auf Seite 203 findet man

$$(W_{\mathrm{II}} W_{\mathrm{III}}) = -\frac{1}{4} W_{\mathrm{I}} f, \quad (W_{\mathrm{II}} W_{\mathrm{IV}}) = 0, \quad (W_{\mathrm{II}} W_{\mathrm{V}}) = \frac{1}{3} W_{\mathrm{I}} f - \frac{2}{3} W_{\mathrm{III}} f - \frac{1}{2} W_{\mathrm{V}} f,$$

$$(W_{\mathrm{II}} W_{\mathrm{VI}}) = -\frac{4}{3} W_{\mathrm{IV}} f - W_{\mathrm{VI}} f, \quad (W_{\mathrm{II}} W_{\mathrm{VII}}) = -\frac{4}{9} W_{\mathrm{I}} f + \frac{4}{9} W_{\mathrm{III}} f - \frac{5}{3} W_{\mathrm{V}} f - \frac{3}{2} W_{\mathrm{VII}} f.$$

$W_{\mathrm{II}} f$ transformiert hiernach die Symbole $Wf = e_1 W_{\mathrm{I}} f + \cdots + e_7 W_{\mathrm{VII}} f$ durch

$$E_{\mathrm{II}} f = \left(\frac{1}{4} e_3 - \frac{1}{3} e_5 + \frac{4}{9} e_7\right) \frac{\partial f}{\partial e_1} + \left(e_1 + \frac{2}{3} e_5 - \frac{4}{9} e_7\right) \frac{\partial f}{\partial e_3} + \frac{4}{3} e_6 \frac{\partial f}{\partial e_4} + \left(\frac{1}{2} e_5 + \frac{5}{3} e_7\right) \frac{\partial f}{\partial e_5} + e_6 \frac{\partial f}{\partial e_6} + \frac{3}{2} e_7 \frac{\partial f}{\partial e_7}.$$

Da aus $W_{\mathrm{I}} f$ und $W_{\mathrm{II}} f$ die ganze Gruppe „erklammert" werden kann, und zwar durch fortgesetztes Klammern mit $W_{\mathrm{I}} f$, so ist die adjungierte Gruppe in der Form

$$E_{\mathrm{I}}, \quad E_{\mathrm{II}}, \quad (E_{\mathrm{I}} E_{\mathrm{II}}), \quad (E_{\mathrm{I}}(E_{\mathrm{I}} E_{\mathrm{II}})), \ldots$$

darstellbar. Dies zu wissen ist z. B. für die Bestimmung der invarianten Untergruppen von großem Nutzen. Wir wollen es an dem Beispiel der eingliedrigen invarianten Untergruppen zeigen. Sucht man zunächst eine infinitesimale Transformation Wf, die unter der Einwirkung von $W_{\mathrm{II}} f$ bis auf einen Faktor erhalten bleibt, so muß man die Forderung $E_{\mathrm{II}} f = \varrho\left(e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + \cdots + e_7 \frac{\partial f}{\partial e_7}\right)$ stellen. ϱ erfüllt die charakteristische Gleichung, die hier folgendermaßen lautet:

$$\varrho^2\left(\varrho - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\varrho + \frac{1}{2}\right)(\varrho - 1)\left(\varrho - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Zu $\varrho = 1$, $\varrho = \frac{3}{2}$, $\varrho = -\frac{1}{2}$ gehören die Transformationen

$$W_{\mathrm{IV}} f + \frac{3}{4} W_{\mathrm{VI}} f, \quad W_{\mathrm{III}} f + \frac{15}{4} W_{\mathrm{V}} f + \frac{9}{4} W_{\mathrm{VII}} f, \quad W_{\mathrm{I}} f - 2 W_{\mathrm{III}} f,$$

zu $\varrho = 0$ und $\varrho = \frac{1}{2}$

$$e_2 W_{\mathrm{II}} f + e_4 W_{\mathrm{IV}} f, \quad e_1\left(W_{\mathrm{I}} f - \frac{3}{2} W_{\mathrm{V}} f\right) + e_3\left(W_{\mathrm{III}} f + \frac{3}{4} W_{\mathrm{V}} f\right).$$

Die Klammerausdrücke mit $W_{\mathrm{I}} f$ lauten:

$$W_{\mathrm{V}} f + \frac{3}{4} W_{\mathrm{VII}} f, \quad 0, \quad -2 W_{\mathrm{IV}} f,$$

$$e_2 W_{\mathrm{III}} f + e_4 W_{\mathrm{V}} f, \quad -\frac{3}{2} e_1 W_{\mathrm{VI}} f + e_3\left(W_{\mathrm{IV}} f + \frac{3}{4} W_{\mathrm{VI}} f\right).$$

Nur in einem Falle ist der Klammerausdruck bis auf einen Faktor gleich dem ursprünglichen Symbol, nämlich bei

$$W_{III}f + \frac{15}{4} W_V f + \frac{9}{4} W_{VII} f = W_2 f.$$

$W_2 f$ ist also die einzige eingliedrige invariante Untergruppe, was mit den Angaben bei Lie-Engel[7]) übereinstimmt.

Eine mit *E* verknüpfte Kurvenschar.

Wenn die Liesche Determinante der drei ersten Begleiterinnen von E verschwindet, so ist das eine invariante Eigenschaft. Anstatt diese Determinante für

$$W_1 f = -W_1 f - \frac{1}{2} W_2 f + \frac{1}{3} W_7 f,$$

$$W_{II} f = \frac{1}{2} W_5 f + \frac{3}{2} W_6 f,$$

$$W_{III} f = -\frac{1}{2} W_1 f - \frac{1}{4} W_4 f - \frac{1}{6} W_6 f$$

zu bilden, kann man sie für

$$W_1 f + \frac{1}{2} W_4 f = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\left(u^2 \frac{\partial f}{\partial v} + 2u \frac{\partial f}{\partial v_1}\right),$$

$$W_5 f + 3 W_6 f = u \frac{\partial f}{\partial u} + 3v \frac{\partial f}{\partial v} + 2v_1 \frac{\partial f}{\partial v_1},$$

$$W_7 f = v_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2} v_1^2 \frac{\partial f}{\partial v}$$

aufstellen. Die Eigenschaft

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}u^2 & u \\ u & 3v & 2v_1 \\ v_1 & \frac{1}{2}v_1^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder $v_1\left(v_1^2 - \frac{3}{2} u^2 v_1 + 3uv\right) = 0$ hat also Invariantencharakter. Dasselbe gilt von $v_1 = 0$ und $v_1^2 - \frac{3}{2} u^2 v_1 + 3uv = 0$. Uns interessiert hier vor allem die zweite Gleichung. Aus den Klammerrelationen

$$(W_I W_{II}) = W_{III} f, \quad (W_{II} W_{III}) = -\frac{1}{4} W_I f,$$

die oben registriert wurden, geht hervor, daß $v_1^2 - \frac{3}{2} u^2 v_1 + 3uv = 0$ bei $W_{II} f$, d. h. bei $u \frac{\partial f}{\partial u} + 3v \frac{\partial f}{\partial v} + 2v_1 \frac{\partial f}{\partial v_1}$ invariant bleibt. Hier hat man also Gelegenheit, das Liesche Multiplikatortheorem anzuwenden. Man weiß auf Grund dieses Theorems, daß

$$\frac{dv - \left(\frac{3}{4} u^2 + \sqrt{\frac{9}{16} u^4 - 3uv}\right) du}{3v - \left(\frac{3}{4} u^2 + \sqrt{\frac{9}{16} u^4 - 3uv}\right) u}$$

ein Differential $d\varphi(u, v)$ sein muß. $\varphi(u, v) = \text{const.}$ ist dann das Integrationsergebnis.

[7]) A. a. O.[1]), S. 437.

Wenn man die Invariante $w = vu^{-3}$ einführt, die u, v bei $W_{II}f$ haben, so verwandelt sich der obige Differentialausdruck in

$$\frac{dw}{3w - \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} - 3w}} + \frac{du}{u},$$

womit die Voraussage, welche uns das Liesche Theorem ermöglichte, bestätigt ist. Der erste Summand erweist sich als logarithmische Ableitung von

$$\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - 3w}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - 3w}\right).$$

Somit lautet das Integrationsergebnis:

$$u\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - 3w}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - 3w}\right) = C.$$

Setzt man

$$\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - 3w}\right)^{\frac{1}{3}} = t,$$

so wird

$$u = \frac{Ct}{t^3 + \frac{1}{2}}, \qquad v = \frac{C^3 t^3 (1 - t^3)}{3\left(t^3 + \frac{1}{2}\right)^2},$$

woraus durch Bildung des Differentialquotienten folgt:

$$v_1 = \frac{C^2 t^2}{t^3 + \frac{1}{2}}.$$

Zwischen u und v_1 findet man die Beziehung

$$\frac{1}{2} C^3 u^3 + v_1^3 = C^3 u v_1.$$

Wenn man zu E_0 übergeht, fallen u, v, v_1 mit den kartesischen Koordinaten x, y, y_1 zusammen. Zu E_0 gehören also die Kurven

$$(17) \qquad x = \frac{Ct}{t^3 + \frac{1}{2}}, \qquad y = \frac{C^3 t^3 (1 - t^3)}{3\left(t^3 + \frac{1}{2}\right)^2}, \qquad y_1 = \frac{C^2 t^2}{t^3 + \frac{1}{2}}.$$

Ihre Differentialkurven sind die Cartesischen Blätter

$$\frac{1}{2} C^3 x^3 + y_1^3 = C^3 x y_1.$$

Wendet man die Liesche Abbildung $X = x,\ Y = y_1,\ Z = y - \frac{1}{2} x y_1$ an, so erhält man folgende Kurvenschar im Raume:

$$(17') \qquad X = \frac{Ct}{t^3 + \frac{1}{2}}, \qquad Y = \frac{C^2 t^2}{t^3 + \frac{1}{2}}, \qquad Z = -\frac{C^3 t^3}{3\left(t^3 + \frac{1}{2}\right)}.$$

Wir haben es hier mit ∞^1 Normkurven des linearen Komplexes $dZ + \frac{1}{2}(XdY - YdX) = 0$ zu tun, die alle auf dem Kegel $3XZ + Y^2 = 0$ liegen. Dieser Kegel ist die einzige Fläche

zweiter Ordnung, welche die ganze Kurvenschar (17′) aufnimmt. Er entspricht vermöge der Lieschen Abbildung der Differentialgleichung $y_1^2 - \frac{3}{2} x^2 y_1 + 3xy = 0$ und ist als das Schaubild dieser Differentialgleichung anzusehen. Die Kurven (17′) sind die auf dem Kegel verlaufenden Komplexkurven und geben die bildliche Darstellung der Integralkurven jener Differentialgleichung.

In den Gleichungen (17′) steckt noch eine zweite Schar von Normkurven. Man erhält diese Kurven, wenn man t konstant setzt und C als Parameter betrachtet. Sie sind Bahnkurven der infinitesimalen Transformation $XP + 2YQ + 3ZR$, die aus $W_{II} f$ durch die Liesche Abbildung entsteht. Führt man homogene Koordinaten und homogene Parameter ein, so kann man statt (17′) schreiben:

$$X_1 = c_1 c_2^2 t_1 t_2^2, \quad X_2 = c_1^2 c_2 t_1^2 t_2, \quad X_3 = -\frac{1}{3} c_1^3 t_1^3, \quad X_4 = c_2^3 \left(t_1^3 + \frac{1}{2} t_2^3 \right).$$

Man sieht hier, daß die c-Linien Normkurven sind, welche die Fernebene oskulieren, während die t-Linien drei getrennte Fernpunkte aufweisen. Die c-Linien gehören nicht zu den ∞^7 Normkurven des Komplexes $dZ + \frac{1}{2}(XdY - YdX) = 0$. Das Bild einer solchen c-Linie in der (x, y)-Ebene besteht aus ∞^1 Linienelementen, die keinen Elementverein bilden.

Wenn man sich der Abkürzungen $\frac{1}{2} + t^3 = \varrho$, $\frac{1}{2} - 2t^3 = \sigma$ bedient, so ist $\frac{dx}{dt} = C\varrho^{-2}\sigma$, $y_1 = C^2 t^2 \varrho^{-1}$. Hieraus ergibt sich

$$y_2 = Ct\sigma^{-1}(\varrho + \sigma), \quad y_3 = 2\varrho^4 \sigma^{-3}.$$

Führt man $z = y_3^{-\frac{2}{3}}$ ein, so ist

$$M = -\frac{3}{2} y_3^{\frac{8}{3}} z_2, \quad I = -\frac{3}{2} y_3^{\frac{11}{3}} M^{-\frac{3}{2}} z_3.$$

Die Ableitungen z_1, z_2, z_3 von

$$z = 2^{-\frac{2}{3}} \varrho^{-\frac{8}{3}} \sigma^2$$

lassen sich bequem berechnen, und man findet schließlich

$$ds = \sqrt{30}\, t^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + t^3 \right)^{-1} dt, \quad I = \frac{1}{\sqrt{30}} t^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2} - t^3 \right),$$

und weiter

$$\frac{dI}{ds} = -\frac{1}{20} t^{-3} \left(\frac{1}{2} + t^3 \right)^2,$$

so daß man schließen kann

$$\frac{dI}{ds} + \frac{3}{2} I^2 + \frac{1}{10} = 0.$$

Da bei Annäherung an $t = 0$ offenbar I unendlich und s zu Null wird, so kommt man zu der Feststellung

$$\operatorname{arc\,tan}(I\sqrt{15}) + \frac{1}{10} s\sqrt{15} = \frac{\pi}{2},$$

d. h.

$$I = \frac{1}{\sqrt{15}} \cot(s\sqrt{15}). \tag{18}$$

Das ist die gemeinsame natürliche Gleichung der Kurven (17). Die einzelnen Kurven der Schar unterscheiden sich dadurch, daß sie von verschiedenen Elementen sechster Ordnung ausgehen. Aus der ersten Gleichung (17) entnimmt man $t = \frac{xC^{-1}}{2} + \cdots$, aus der ersten und zweiten

$$y = \frac{1}{3}x^3(1-t^3)\left(\frac{1}{2}+t^3\right) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^6C^{-3}}{48} + \cdots.$$

Die Kurven (17) haben also an der Stelle $t = 0$ das singuläre Element fünfter Ordnung $x = 0,\ y = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 1,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0$ gemein. Sie berühren sich also dort in fünfter Ordnung. Die zu C gehörige Kurve enthält das Element sechster Ordnung $x = 0,\ y = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 1,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0,\ y_6 = 15C^{-3}$. Das den Kurven (17) gemeinsame Element läßt sich offenbar kennzeichnen als dasjenige singuläre Element fünfter Ordnung, welches dasselbe Element vierter Ordnung enthält wie unser Anfangselement E_0.

Bemerkung über andere Geometrien.

Auch in andern Geometrien zeigt sich die bei Gruppe (I) festgestellte Eigenschaft, daß die zweite Begleittransformation $W_{II}f$ den Inbegriff der aus W_If, $W_{II}f$, $W_{III}f$ aufgebauten Transformationen invariant läßt. Da $(W_IW_{II}) = W_{III}f$ ist, so liegt jene Eigenschaft vor, sobald $(W_{II}W_{III})$ sich aus W_If, $W_{II}f$, $W_{III}f$ zusammensetzt.

Z. B. lautet in der speziellen Affingeometrie, d. h. in der Geometrie der Gruppe $p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$ die Identitätsformel

$$\frac{df}{ds} = -\left(\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{I}{3}v\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Als Anfangselement ist dabei

$$x^0 = 0, \quad y^0 = 0, \quad y_1^0 = 0, \quad y_2^0 = 1, \quad y_3^0 = 0$$

zugrunde gelegt. Da hier

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v},\ v\frac{\partial f}{\partial u}\right) = u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v}$$

und

$$\left(v\frac{\partial f}{\partial u},\ u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 2v\frac{\partial f}{\partial u}$$

ist, so besteht die bewußte Eigenschaft. Wenn man die Liesche Determinante von

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v_1},\\ &v\frac{\partial f}{\partial u} \qquad\quad - v_1^2\frac{\partial f}{\partial v_1},\\ &u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v} - 2v_1\frac{\partial f}{\partial v_1} \end{aligned}$$

gleich Null setzt, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$(uv_1 - v)^2 + vv_1^2 = 0. \tag{19}$$

Sie gestattet die infinitesimale Transformation $v\frac{\partial f}{\partial u}$, so daß sich Gelegenheit zur Anwendung des Lieschen Multiplikatortheorems bietet. Nach diesem Theorem muß der Ausdruck

$$\frac{u\,dv - v\,du + iv^{\frac{1}{2}}dv}{-v^2}$$

ein vollständiges Differential sein. Tatsächlich ist er das Differential von $\frac{u}{v} + 2iv^{-\frac{1}{2}}$.

Aus $\frac{u}{v} + 2iv^{-\frac{1}{2}} = c$ entnimmt man

$$(u - cv)^2 + 4v = 0.$$

Diese Parabeln sind die Integralkurven von (19). Sie haben das Element $u = 0$, $v = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = -\frac{1}{2}$ gemein. Ihre natürliche Gleichung lautet, wie sich herausstellt, $I = 0$. Sie sind singuläre Bahnkurven der Gruppe.

Eingegangen 15. November 1938.

Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. I.

Divisorenklassen.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle-S.

Die Divisorenklassen eines algebraischen Körpers der Dimension 2, d. h. eines algebraischen Körpers zweier unabhängiger Veränderlicher, kann man in Scharen einteilen, indem man zwei Klassen $(\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{Q}')$ zu derselben Schar rechnet, wenn $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{Q}', \mathfrak{P})$ ist für jeden Primteiler $\mathfrak{P}$. Mit dieser Einteilung beschäftigt sich die folgende Arbeit.

Im Unterschied zu früher nenne ich die Zahl $\{\mathfrak{Q}\}$ der in der Klasse $(\mathfrak{Q})$ enthaltenen linear unabhängigen ganzen Divisoren den *Rang* von $(\mathfrak{Q})$ und verstehe unter ihrer *Dimension* wie die italienischen Mathematiker den um 1 verminderten Rang.

Der zu betrachtende Körper der Dimension 2 werde mit $K = (x, y, z)$ bezeichnet, wo zwischen x, y, z die rational unzerlegbare rationale Gleichung $F(x, y, z) = 0$ bestehe. Ist F in z vom Grade 1, ist also K der Körper (x, y) der rationalen Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher x, y, so heißt K *rational*. Entsteht K aus einem nicht rationalen Körper der Dimension 1 durch Adjunktion einer zweiten unabhängigen Veränderlichen, so werde K *halbrational* genannt. In allen anderen Fällen heiße K *irrational*.

§ 1. Divisorenklassen in einem algebraischen Körper der Dimension 1.

Zunächst seien kurz die Divisorenklassen in einem algebraischen Körper k der Dimension 1 betrachtet. Zwei Klassen $(\mathfrak{q})$ und $(\mathfrak{q}')$ sollen zu *derselben Schar gehören*, *wenn sie dieselbe Ordnung haben*. Divisoren und Klassen der Ordnung 0 mögen kurz *Nulldivisoren* und *Nullklassen* genannt werden. Haben zwei Divisoren $\mathfrak{q}_0$ und $\mathfrak{q}$ dieselbe Ordnung, so ist $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{r}$ ein Nulldivisor und $(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}_0) = (\mathfrak{r})$ eine Nullklasse. Umgekehrt hat der Divisor $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0\mathfrak{r}$ dieselbe Ordnung wie $\mathfrak{q}_0$, wenn $\mathfrak{r}$ Nulldivisor ist. Man erhält daher alle Klassen, die mit $(\mathfrak{q}_0)$ zu derselben Schar gehören, wenn man in $(\mathfrak{q}_0\mathfrak{r}) = (\mathfrak{q}_0)(\mathfrak{r})$ die Klasse $(\mathfrak{r})$ alle Nullklassen durchlaufen läßt, so daß es genügt, die Nullklassen zu betrachten.

Da mit $(\mathfrak{r})$ auch $(\mathfrak{r}^{-1})$ und mit $(\mathfrak{r}_1)$ und $(\mathfrak{r}_2)$ auch $(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = (\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1)$ Nullklasse ist, so bilden die Nullklassen eine kommutative Gruppe, deren Einheit die Hauptklasse ist.

Das Geschlecht von k sei g, und $\mathfrak{g}_0$ sei ein ganzer Divisor der Ordnung g. Ist $\mathfrak{r}$ ein Nulldivisor, so enthält die Klasse $(\mathfrak{r}\mathfrak{g}_0)$ einen und i. a. auch nur einen ganzen Divisor $\mathfrak{g}$. Man erhält daher alle Nullklassen und i. a. jede nur einmal, wenn man $\mathfrak{g}$ in $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)$ die ganzen Divisoren der Ordnung g durchlaufen läßt, so daß ihre Anzahl ∞^g ist. Es sei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_g, \qquad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{p}_{10}\mathfrak{p}_{20} \cdots \mathfrak{p}_{g0};$$

ferner seien $v_1, v_2, \ldots, v_g$ g linear unabhängige Integrale erster Gattung. Setzt man

$$u_i = \int_{\mathfrak{p}_{10}}^{\mathfrak{p}_1} dv_i + \int_{\mathfrak{p}_{20}}^{\mathfrak{p}_2} dv_i + \cdots + \int_{\mathfrak{p}_{g0}}^{\mathfrak{p}_g} dv_i,$$

so entspricht jeder Nullklasse $(\mathfrak{r}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)$ ein Wertsystem u_i und umgekehrt. Diese Zuordnung ist eineindeutig, wenn man zwei Wertsysteme u_i als gleich rechnet, wenn sie sich nur um eine Periode unterscheiden. Die Klassen $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)$ und $(\mathfrak{g}'/\mathfrak{g}_0)$ sind nämlich dann und nur dann gleich, wenn $\mathfrak{g} \sim \mathfrak{g}'$. Nach dem Abelschen Theorem unterscheiden sich aber dann und nur dann die zu $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ gehörenden Wertsysteme u_i und u_i' höchstens um eine Periode, wenn $\mathfrak{g} \sim \mathfrak{g}'$.

Der Körper der Dimension g, der aus den symmetrischen Funktionen von g Stellen von k besteht, heißt die *Riemannsche Mannigfaltigkeit* von k. Die in ihr enthaltenen Funktionen sind abelsche Funktionen der g Veränderlichen u_i. Das Ergebnis läßt sich daher so aussprechen:

In einem algebraischen Körper k der Dimension 1 *des Geschlechtes g gibt es* ∞^g *Nullklassen und ebensoviele Klassen einer gegebenen Ordnung. Die Klassen sind den Stellen der Riemannschen Mannigfaltigkeit V von k zugeordnet. Diese Zuordnung ist ausnahmslos eineindeutig, wenn man V als Körper von abelschen Funktionen von g Veränderlichen* u_i *betrachtet, und die Stellen von V durch die Werte der* u_i *definiert. Dabei sind die* u_i *auf ein Periodenrechtkant zu beschränken.*

Über die in den Klassen einer gegebenen Ordnung m enthaltenen *ganzen* Divisoren gilt nach dem Riemann-Rochschen Satz:

1. Für $m > 2g - 2$ sind in jeder der ∞^g Klassen ∞^{m-g} ganze Divisoren enthalten.

2. Für $g \leqq m \leqq 2g - 2$ sind in jeder der ∞^g Klassen mindestens ∞^{m-g} ganze Divisoren vorhanden. Es gibt aber Klassen, die mehr enthalten. Ihre Anzahl ist höchstens ∞^{g-1}.

3. Für $g > m$ gibt es nur ∞^m Klassen mit ganzen Divisoren, und jede von ihnen enthält i. a. nur einen ganzen Divisor.

§ 2. Nulldivisoren und Nullklassen in einem Körper der Dimension 2.

Ist $\mathfrak{Q}$ ein Divisor und $\mathfrak{P}$ ein Primteiler, so heiße $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ die *Ordnung von* $\mathfrak{Q}$ *in bezug auf* $\mathfrak{P}$. Da $(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{Q}_2, \mathfrak{P})$, wenn $\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{Q}_2$, so haben alle Divisoren derselben Klasse dieselbe Ordnung in bezug auf $\mathfrak{P}$, so daß wir $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ auch die Ordnung der Klasse $(\mathfrak{Q})$ in bezug auf $\mathfrak{P}$ nennen.

Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die Nenner der unabhängigen Veränderlichen x, y, und ist

$$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{L}) = \alpha, \quad (\mathfrak{Q}, \mathfrak{M}) = \beta,$$

so soll (α, β) die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ und $(\mathfrak{Q})$ in bezug auf $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ heißen oder auch kurz die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ und $(\mathfrak{Q})$, wenn die unabhängigen Veränderlichen fest gewählt sind.

Haben zwei Divisoren $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ dieselbe Ordnung in bezug auf jeden Primteiler, so sagen wir, sie sind *algebraisch äquivalent*, in Zeichen

$$\mathfrak{Q}_1 \approx \mathfrak{Q}_2. \tag{1}$$

Wollen wir die gewöhnliche Äquivalenz hiervon unterscheiden, so sprechen wir von *rationaler Äquivalenz*. Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ rational äquivalent, so sind die Klassen $(\mathfrak{Q}_1)$ und $(\mathfrak{Q}_2)$ einander gleich. Sind sie nur algebraisch äquivalent, so sagen wir, *ihre Klassen sind äquivalent*, in Zeichen

$$(\mathfrak{Q}_1) \sim (\mathfrak{Q}_2). \tag{2}$$

Die rationale Äquivalenz ist ein Sonderfall der algebraischen.

Von zwei Divisoren oder Klassen, die algebraisch äquivalent sind, sagen wir auch, sie haben dieselben Ordnungen. Sind diese Ordnungen alle 0, so heißt der Divisor ein *Nulldivisor* und die Klasse eine *Nullklasse*. Zu den Nullklassen gehört die Hauptklasse,

so daß es mindestens eine Nullklasse gibt. Für jeden Nulldivisor $\mathfrak{R}$ und jede Nullklasse $(\mathfrak{R})$ gilt

$$\mathfrak{R} \approx 1, \quad (\mathfrak{R}) \sim (1). \tag{3}$$

Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ Divisoren gleicher Ordnungen, ist also $\mathfrak{Q}_1 \approx \mathfrak{Q}_2$ und $(\mathfrak{Q}_1) \sim (\mathfrak{Q}_2)$, so ist $\mathfrak{Q}_1/\mathfrak{Q}_2$ Nulldivisor und $(\mathfrak{Q}_1/\mathfrak{Q}_2)$ Nullklasse. Ist umgekehrt $\mathfrak{R}$ ein Nulldivisor, so haben die Divisoren $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{R}\mathfrak{Q}_1$ dieselben Ordnungen. Man erhält also alle Divisoren, die mit einem gegebenen Divisor $\mathfrak{Q}$ dieselben Ordnungen haben, und nur diese, wenn man in $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ den Divisor $\mathfrak{R}$ alle Nulldivisoren durchlaufen läßt. Um eine Übersicht über alle Divisoren und Klassen gleicher Ordnungen zu erhalten, genügt es also, die Nulldivisoren und -klassen zu betrachten.

Da Produkt und Quotient zweier Nulldivisoren wieder ein Nulldivisor ist, so bilden die Nulldivisoren eine (unendliche) kommutative Gruppe, die mit $\langle\mathfrak{R}\rangle$ bezeichnet sei. Das Einselement ist der Divisor 1. Ebenso bilden die Nullklassen eine kommutative Gruppe $\langle(\mathfrak{R})\rangle$, deren Einheit die Hauptklasse ist.

Ist $\mathfrak{R}$ Nulldivisor und $\mathfrak{Q}$ irgendein Divisor, so ist

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{Q}) = 0, \quad \text{also auch} \quad (\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = 0; \tag{4}$$

jede Nullklasse hat daher den Grad 0.

§ 3. Hilfssätze.

1. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primteiler und $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor, so ist

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}) \geqq 0, \quad \text{wenn} \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) \geqq 0.$$

Ist nämlich $\mathfrak{P}'$ ein von $\mathfrak{P}$ verschiedener Primteiler, so ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ als Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ größer oder gleich 0. Daher kann $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ nur dadurch kleiner als 0 werden, daß $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, und daß $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) < 0$ ist.

2. Für den Primteiler $\mathfrak{C}$ und die Klasse $(\mathfrak{G})$ gelte

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) \geqq 0, \quad \{\mathfrak{G}\} > \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) + \lambda, \quad \lambda > 0, \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) \geqq 0.$$

Dann gibt es in $(\mathfrak{G})$ einen ganzen Divisor, der durch $\mathfrak{C}^\lambda$ teilbar ist.

Da $\{\mathfrak{G}\} > (\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) + 1$, so gibt es in $(\mathfrak{G})$ einen ganzen Divisor, der mindestens $(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) + 1$ Schnittpunkte mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam hat, der also $\mathfrak{C}$ enthält. Setzt man $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}\mathfrak{G}_1$, so wird

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{G}_1\} \geqq \{\mathfrak{G}\} - (\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) - 1 &> (\lambda - 1)(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) + (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}_1) + (\lambda - 1)(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) + (\lambda - 1),\end{aligned}$$

so daß

$$\{\mathfrak{G}_1\} > (\lambda - 1)(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}_1) + (\lambda - 1).$$

Ist $\lambda - 1 > 0$, so folgt, indem man in den eben angestellten Betrachtungen λ durch $\lambda - 1$ ersetzt, daß in $(\mathfrak{G}_1)$ mindestens ein durch $\mathfrak{C}$ teilbarer ganzer Divisor enthalten ist, und daß für $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{G}_2$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}^2\mathfrak{G}_2$

$$\{\mathfrak{G}_2\} > (\lambda - 2)(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}_2) + (\lambda - 2).$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet:

Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}^k\mathfrak{G}_k$, so ist

$$\{\mathfrak{G}_k\} > (\lambda - k)(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}_k) + (\lambda - k), \quad \text{wenn} \quad \lambda \geqq k.$$

Hieraus ergibt sich für $k = \lambda$, daß $\{\mathfrak{G}_\lambda\} = \{\mathfrak{G}/\mathfrak{C}^\lambda\} > 0$, daß es also in der Klasse $(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}^\lambda)$ einen ganzen Divisor gibt. Das ist aber die Behauptung.

3. $\mathfrak{C}$ sei ein Primteiler, $(\mathfrak{G})$ eine Klasse und λ eine positive ganze Zahl. Dann ist

$$\{\mathfrak{G}\} \leqq \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) + \lambda, \text{ wenn } 0 \leqq (\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) < \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}), \text{ also } (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) > 0. \tag{5}$$

Machen wir die Annahme, der Satz sei nicht richtig, es sei also $\{\mathfrak{G}\} > \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) + \lambda$, so folgt nach Hilfssatz 2, daß es in $(\mathfrak{G})$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{C}^\lambda \mathfrak{H}$ gibt, der durch $\mathfrak{C}^\lambda$ teilbar ist. Dann wird

$$\mathfrak{H} \sim \mathfrak{G}\mathfrak{C}^{-\lambda}, \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{G}) - \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}),$$

so daß nach (5) $(\mathfrak{C}, \mathfrak{H}) < 0$, während nach Hilfssatz 1 $(\mathfrak{C}, \mathfrak{H}) \geqq 0$ ist. Die Annahme ergibt daher einen Widerspruch.

4. Sind $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die Nenner der unabhängigen Veränderlichen x, y, so ist für $(\mathfrak{L}, \mathfrak{G}) \geqq 0$

(6) $$\{\mathfrak{G}\} \leqq \lambda(\mathfrak{L}, \mathfrak{G}) + \lambda, \quad \text{wenn} \quad (\mathfrak{M}, \mathfrak{G}) - \lambda(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) < 0.$$

Macht man die Annahme, daß $\{\mathfrak{G}\} > \lambda(\mathfrak{L}, \mathfrak{G}) + \lambda$, so gibt es wegen $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = 0$ nach Hilfssatz 2 in $(\mathfrak{G})$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{H}$, der durch $\mathfrak{L}^\lambda$ teilbar ist. Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{H} \sim \mathfrak{G}\mathfrak{L}^{-\lambda}, \quad (\mathfrak{M}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{G}) - \lambda(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}),$$

so daß nach (6) $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H}) < 0$, was dem Hilfssatz 1 widerspricht.

§ 4. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Divisor Nulldivisor ist oder eine Klasse Nullklasse.

Die Bedingung dafür, daß ein Divisor Nulldivisor ist, geben wir in mehreren Formen an.

1. *Der Divisor $\mathfrak{Q}$ ist dann und nur dann Nulldivisor oder die Klasse $(\mathfrak{Q})$ Nullklasse, wenn*

(7) $$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) = 0 \quad \textit{und} \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{Q}) = 0$$

für auch nur einen Primteiler $\mathfrak{C}$, für den

(8) $$(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) > 0.$$

Um nachzuweisen, daß $\mathfrak{Q}$ Nulldivisor ist, ist zu zeigen, daß $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 0$ für jeden Primteiler $\mathfrak{P}$. Den Nachweis führen wir indirekt, nehmen also an, es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler, für den $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) \neq 0$. Da $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^{-1}$ gleichzeitig Nulldivisoren sind oder nicht, so kann man $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{Q}^{-1}$ ersetzen. Wegen $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}^{-1}) = -(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ darf man daher annehmen, daß

(9) $$(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) > 0.$$

Setzt man, unter $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse verstehend, zur Abkürzung

(10) $$s = \{\mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{P}^\mu\} + \{\mathfrak{K}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu}\},$$

so ist nach dem Riemann-Rochschen Satze wegen (7)

(11) $$s \geqq p_a + 1 + \frac{\mu^2}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - \frac{\mu}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}) + \alpha\left[\mu(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K})\right].$$

Wählt man μ fest, und zwar so, daß

$$\mu(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{K}) > 0,$$

was wegen (9) möglich ist, so wächst s gleichzeitig mit α nach $+\infty$.

Ferner sei eine ganze Zahl λ so gewählt, daß

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{P}^\mu) = \mu(\mathfrak{C}, \mathfrak{P}) < \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}),$$
$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - \mu(\mathfrak{C}, \mathfrak{P}) < \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}),$$

was wegen (8) möglich ist. Die Zahl λ kann und soll unabhängig von α gewählt werden.

Da $(\mathfrak{C}, \mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{P}^\mu) = \mu(\mathfrak{C}, \mathfrak{P}) \geqq 0$, so ist nach § 3, Hilfssatz 3

$$\{\mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{P}^\mu\} \leqq \lambda\mu(\mathfrak{C}, \mathfrak{P}) + \lambda.$$

Ist $(\mathfrak{C}, \mathfrak{R}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{R}) - \mu(\mathfrak{C}, \mathfrak{P}) < 0$, so kann nach § 3, Hilfssatz 1 die Klasse $(\mathfrak{R}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu})$ keinen ganzen Divisor enthalten, sodaß $\{\mathfrak{R}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu}\} = 0$. Ist $(\mathfrak{C}, \mathfrak{R}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu}) \geqq 0$, so ist nach § 3, Hilfssatz 3

$$\{\mathfrak{R}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu}\} \leqq \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{R}) - \lambda\mu(\mathfrak{C}, \mathfrak{P}) + \lambda.$$

Auf jeden Fall liegt die durch (10) definierte Zahl s unterhalb einer endlichen von α unabhängigen Schranke, während sich vorher ergeben hatte, daß s mit α nach $+\infty$ geht. Die Annahme $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) > 0$ muß also falsch sein. Die im Satze angegebenen Bedingungen sind daher hinreichend. Daß sie notwendig sind, folgt aus der Definition der Nulldivisoren und -klassen.

2. *Man kann in Satz* 1 *den Primteiler* $\mathfrak{C}$ *durch einen ganzen Divisor*

(12) $$\mathfrak{C} = \mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$$

ersetzen, wenn

(13) $$(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_0) > 0, \quad (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_k) \geqq 0 \quad \textit{für} \quad k > 0.$$

Zum Beweise sei wieder angenommen, es gebe einen Primteiler $\mathfrak{P}$, für den $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) > 0$, so daß die durch (10) gegebene Zahl s bei passend gewähltem μ mit α nach $+\infty$ geht. Es enthält dann entweder $(\mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{P}^\mu)$ oder $(\mathfrak{R}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu})$ für beliebig großes α ganze Divisoren.

Im ersten Fall folgt wegen (13) nach § 3, Hilfssatz 1

$$(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{P}^\mu) = \alpha(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{Q}) + \mu(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}) \geqq 0$$

und im zweiten

$$(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{R}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu}) = (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{R}) - \alpha(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{Q}) - \mu(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}) \geqq 0,$$

und zwar für beliebig großes positives α. Daher ist entweder

(14) $(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{Q}) \geqq 0$ für $k = 0, 1, \ldots, r$ oder $(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{Q}) \leqq 0$ für $k = 0, 1, \ldots, r$.

Aus der Voraussetzung

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{P}_0, \mathfrak{Q}) + (\mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}) + \cdots + (\mathfrak{P}_r, \mathfrak{Q}) = 0$$

ergibt sich wegen (14)

$$(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{Q}) = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, r.$$

Da nach (13) $(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_0) > 0$, folgt aus Satz 1 die Behauptung, wenn man für $\mathfrak{C}$ den Primteiler $\mathfrak{P}_0$ wählt.

3. *Sind* $\mathfrak{L}$ *und* $\mathfrak{M}$ *die Nenner der unabhängigen Veränderlichen* x, y, *so ist der Divisor* $\mathfrak{Q}$ *dann und nur dann Nulldivisor, wenn*

(15) $$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) = 0, \quad (\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}) = 0.$$

Daß die Bedingungen (15) notwendig sind, folgt aus der Definition der Nulldivisoren. Um zu beweisen, daß sie hinreichend sind, sei wieder angenommen, es gebe einen Primteiler $\mathfrak{P}$, für den $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) > 0$. Wir benutzen wieder die durch (10) gegebene Zahl s, von der wir wissen, daß sie bei passender Wahl von μ mit α nach $+\infty$ geht, und wählen eine ganze Zahl λ so groß, daß

$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{P}^\mu) = \mu(\mathfrak{M}, \mathfrak{P}) < \lambda(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}),$$
$$(\mathfrak{M}, \mathfrak{R}\mathfrak{Q}^{-\alpha}\mathfrak{P}^{-\mu}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{R}) - \mu(\mathfrak{M}, \mathfrak{P}) < \lambda(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}),$$

was wegen $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) > 0$ möglich ist. Die Zahl λ kann und soll unabhängig von α gewählt werden. Ähnlich wie unter Nr. 1 folgt, daß s unterhalb einer endlichen von α unabhängigen Schranke liegt, was dem oben gewonnenen Ergebnis widerspricht, daß s mit α nach $+\infty$ geht. Also muß $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 0$ sein.

4. *Für zwei Divisoren* $\mathfrak{D}_1$ *und* $\mathfrak{D}_2$ *gilt dann und nur dann*

$$(16) \qquad \mathfrak{D}_1 \approx \mathfrak{D}_2, \quad (\mathfrak{D}_1) \sim (\mathfrak{D}_2),$$

wenn

$$(17) \qquad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1) - 2(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) + (\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_2) = 0, \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{D}_1) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{D}_2)$$

für auch nur einen Primteiler $\mathfrak{C}$ *mit* $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) > 0$ *oder für nur einen ganzen Divisor* $\mathfrak{C}$, *der nur Primteiler enthält mit nicht negativem Grade und mindestens einen Primteiler mit positivem Grade.*

Setzt man $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_2$, so ist nach (17)

$$(18) \qquad (\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = 0, \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) = 0$$

und die Behauptung (16) folgt aus Satz 1 und 2.

5. *Sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *Divisoren, von denen einer, etwa* $\mathfrak{A}$ *ganz ist und nur Primteiler enthält, deren Grad nicht negativ ist, und mindestens einen Primteiler mit positivem Grade, und ist*

$$(19) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}),$$

so ist

$$(20) \qquad \mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}, \quad (\mathfrak{A}) \sim (\mathfrak{B}).$$

Setzt man $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ und wählt in Satz 1 und 2 $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$, so ergibt sich die Behauptung, da nach der Voraussetzung (19) die Gleichungen (18) gelten.

§ 5. Rational und algebraisch verbundene Divisoren und Klassen.

$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ seien Divisoren. Lassen sich ganze Zahlen λ_k, die nicht alle verschwinden, so bestimmen, daß

$$(21) \qquad \mathfrak{C}_1^{\lambda_1} \mathfrak{C}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{C}_r^{\lambda_r} \sim 1, \quad \text{also} \quad (\mathfrak{C}_1)^{\lambda_1} (\mathfrak{C}_2)^{\lambda_2} \cdots (\mathfrak{C}_r)^{\lambda_r} = (1),$$

so sollen die Divisoren $\mathfrak{C}_k$ oder die Klassen $(\mathfrak{C}_k)$ *rational verbunden* heißen. Lassen sich die λ_k so bestimmen, daß

$$(22) \qquad \mathfrak{C}_1^{\lambda_1} \mathfrak{C}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{C}_r^{\lambda_r} \approx 1, \quad \text{also} \quad (\mathfrak{C}_1)^{\lambda_1} (\mathfrak{C}_2)^{\lambda_2} \cdots (\mathfrak{C}_r)^{\lambda_r} \sim (1),$$

so mögen die Divisoren $\mathfrak{C}_k$ oder die Klassen $(\mathfrak{C}_k)$ *algebraisch verbunden* heißen.

Da die rationale Äquivalenz ein Sonderfall der algebraischen ist, so sind rational verbundene Divisoren auch immer algebraisch verbunden.

Die Bedingungen dafür, daß gegebene Divisoren algebraisch verbunden sind, werden durch folgenden Satz gegeben.

Es seien $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ *Divisoren; ferner sei* $\mathfrak{C}$ *ein Primteiler von positivem Grad oder ein ganzer Divisor, dessen Primteiler einen nicht negativen Grad haben, und der mindestens einen Primteiler mit positivem Grad enthält. Man setze*

$$(23) \qquad (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_k) = v_k, \quad (\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_k) = v_{ik}$$

und bezeichne mit v_0 *die quadratische Matrix der* v_{ik} *und mit* v *die Matrix, die aus* v_0 *entsteht, wenn man in einer neuen Zeile die* v_k *hinzufügt. Dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die* r *Divisoren* $\mathfrak{C}_k$ *algebraisch verbunden sind, die, daß die Matrix* v *höchstens den Rang* $r - 1$ *hat.*

Zunächst kann man der Definition der algebraischen Verbundenheit die Form geben:

Die r *Divisoren* $\mathfrak{C}_k$ *heißen algebraisch verbunden, wenn es ganze Zahlen* λ_k, *die nicht alle verschwinden, so gibt, daß der Divisor*

$$(24) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{C}_1^{\lambda_1} \mathfrak{C}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{C}_r^{\lambda_r}$$

ein Nulldivisor ist.

1. Die Zahlen λ_k mögen sich so bestimmen lassen, daß $\mathfrak{R}$ in (24) ein Nulldivisor ist. Dann folgt aus (24) nach der Definition eines Nulldivisors

$$(25) \qquad (\mathfrak{R}, \mathfrak{C}_k) = \lambda_1 v_{1k} + \lambda_2 v_{2k} + \cdots + \lambda_r v_{rk} = 0,$$

$$(26) \qquad (\mathfrak{R}, \mathfrak{C}) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r = 0.$$

Da v die Matrix dieses linearen homogenen Gleichungssystems ist, so folgt, daß v höchstens den Rang $r-1$ haben kann.

2. Der Rang von v sei höchstens $r-1$. Dann haben die Gleichungen (25), (26) mindestens eine von 0 verschiedene Lösung. Da die v_k und v_{ik} ganze Zahlen sind, so haben sie auch eine ganzzahlige Lösung (λ_k). Definiert man dann $\mathfrak{R}$ durch (24), so folgt aus (25), (26)

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = \Sigma \lambda_k (\mathfrak{R}, \mathfrak{C}_k) = 0, \qquad (\mathfrak{R}, \mathfrak{C}) = 0,$$

so daß nach § 4, Satz 1 und 2 der Divisor $\mathfrak{R}$ ein Nulldivisor ist.

Zusatz. Ist einer der Divisoren $\mathfrak{C}_k$, etwa $\mathfrak{C}_1$, ein ganzer Divisor, der nur Primteiler von nicht negativem Grade enthält und mindestens einen mit positivem Grade, so kann man $\mathfrak{C}_1$ an Stelle von $\mathfrak{C}$ verwenden. In diesem Falle sind daher die r Divisoren $\mathfrak{C}_k$ algebraisch verbunden, wenn der Rang der Matrix v_0 höchstens $r-1$ ist.

Bedingungen für die rationale Äquivalenz zweier Divisoren und damit auch für die rationale Verbundenheit von Divisoren hat Severi ([2], [3]) angegeben[1]). Wir behandeln diese Frage in § 14.

§ 6. Bestimmung der Nullklassen.

Ist $\mathfrak{C}_0$ ein ganzer Divisor, so sagt man, alle ganzen Divisoren $\mathfrak{C}$, für die $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_0$ ein Nulldivisor ist, bilden eine Schar $\langle \mathfrak{C} \rangle$. Die Bestimmung der Schar kann nach Severi ([1]) auf algebraischem Wege erfolgen, so daß ihre Divisoren den Stellen eines algebraischen Körpers zugeordnet sind. Zerfällt dieser Körper, so heißt die Schar zerlegbar, sonst unzerlegbar. Uns kommt es nur auf die verschiedenen *Klassen* $(\mathfrak{C})$ an. Die Veränderlichkeit der Parameter der Schar $\langle \mathfrak{C} \rangle$ sei so eingeschränkt, daß man aus jeder Klasse einen und nur einen ganzen Divisor erhält. Auch diese ganzen Divisoren bilden eine algebraische Schar, so daß die Klassen i. a. eineindeutig den Stellen eines algebraischen Körpers, etwa der Dimension s, zugeordnet sind. Unter $\langle \mathfrak{C} \rangle$ sei im folgenden diese Schar verstanden. Da $(\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_0)$ Nullklasse ist, so ist für jeden Divisor $\mathfrak{Q}$

$$(27) \qquad (\mathfrak{Q}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{C}_0), \quad \text{also auch} \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_0) = (\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_0).$$

Im besonderen sei die Klasse $(\mathfrak{C}_0)$ regulär, so daß

$$(28) \quad \{\mathfrak{C}_0\} = p_a + 1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) \geqq 2, \quad \omega_{\mathfrak{C}_0}(\mathfrak{C}_0) = p_g - p_a = \gamma, \quad \omega_{\mathfrak{C}_0}(\mathfrak{K}) = 0.$$

Außerdem kann und soll $\mathfrak{C}_0$ so gewählt sein, daß

$$(29) \qquad (\mathfrak{C}_0, \mathfrak{K}/\mathfrak{C}_0) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}/\mathfrak{C}) < 0, \quad \text{also} \quad \{\mathfrak{K}/\mathfrak{C}\} = \{\mathfrak{K}/\mathfrak{C}_0\} = 0.$$

Ferner ist die Klasse $(\mathfrak{C}_0)$ vollkommen primitiv, und ihre ganzen Divisoren sind i. a. Primteiler.

Gehört $\mathfrak{C}$ der Schar $\langle \mathfrak{C} \rangle$ an, so ist nach Definition $(\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_0) = (\mathfrak{R})$ Nullklasse. Ist umgekehrt $(\mathfrak{R})$ Nullklasse, und enthält die Klasse $(\mathfrak{R}\mathfrak{C}_0)$ einen ganzen Divisor, so enthält sie auch einen ganzen Divisor der Schar $\langle \mathfrak{C} \rangle$. Im allgemeinen ist nicht in jeder der Klassen $(\mathfrak{R}\mathfrak{C}_0)$ ein ganzer Divisor vorhanden. Wenn aber für $\mathfrak{C}_0$ die oben angegebenen Bedingungen erfüllt sind, so ist nach dem Riemann-Rochschen Satz unter Beachtung des Um-

---

[1]) Die Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

standes, daß $\mathfrak{R}$ Nulldivisor ist,

$$\{\mathfrak{R}\mathfrak{C}_0\} \geqq p_a + 1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{R}) = \{\mathfrak{C}_0\} \geqq 2,$$

so daß jede der Klassen $(\mathfrak{R}\mathfrak{C}_0)$ ganze Divisoren enthält. Man bekommt daher alle Nullklassen und jede nur einmal, wenn man in

$$(\mathfrak{R}) = (\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_0) \tag{30}$$

$\mathfrak{C}$ die Divisoren der Schar $\langle\mathfrak{C}\rangle$ durchlaufen läßt.

Der Körper, dessen Stellen die Divisoren $\mathfrak{C}$ eineindeutig entsprechen, heiße V. Es besteht die Möglichkeit, daß er zerfällt, etwa in m Körper

$$V_0, V_1, \ldots, V_{m-1},$$

so daß m unzerlegbare Scharen $\langle\mathfrak{C}\rangle$ vorhanden sind, die nicht miteinander zusammenhängen. Die V_i entsprechende Schar sei mit C_i bezeichnet, und mit R_i die Gesamtheit der Nullklassen, die man aus (30) erhält, wenn $\mathfrak{C}$ die Divisoren aus C_i durchläuft. Im besonderen sei C_0 die Schar, die $\mathfrak{C}_0$ enthält, so daß in R_0 die Hauptklasse (1) vorkommt. Wie schon in § 2 angegeben, bilden die Nullklassen eine kommutative Gruppe R, in der die Hauptklasse die Einheit ist. Von dieser Gruppe ist R_0 eine Untergruppe. Denn R_0 enthält die Nullklassen, die stetig in (1) übergehen können und nur diese. Da mit $(\mathfrak{R})$ und $(\mathfrak{R}')$ auch $(\mathfrak{R}^{-1})$ und $(\mathfrak{R}\mathfrak{R}')$ stetig in (1) übergeführt werden können, so sind mit $(\mathfrak{R})$ und $(\mathfrak{R}')$ auch $(\mathfrak{R}^{-1})$ und $(\mathfrak{R}\mathfrak{R}')$ in R_0 enthalten. Ist $(\mathfrak{R}_i)$ eine Klasse aus R_i, so enthält R_i die Nullklassen, die stetig in $\mathfrak{R}_i$ übergehen können, und nur diese. Liegt daher $(\mathfrak{R}_i')$ auch in R_i, so ist $(\mathfrak{R}_i'/\mathfrak{R}_i)$ eine Klasse aus R_0, da diese Klasse stetig in (1) übergeht, wenn $(\mathfrak{R}_i')$ stetig zu $(\mathfrak{R}_i)$ wird. Daher ist R_i Nebengruppe von R_0, und es ist

$$R = R_0 + R_1 + \cdots + R_{m-1}$$

eine Zerlegung von R in Nebengruppen.

Hieraus folgt, daß man die in R_i enthaltenen Nullklassen denen aus R_0 eineindeutig zuordnen kann, indem man die Klassen $(\mathfrak{R}_0)$ und $(\mathfrak{R}_0\mathfrak{R}_i)$ bei fest gehaltenem $\mathfrak{R}_i$ einander entsprechen läßt. Nach Severi ist die Dimension von V_0 gleich $\gamma = p_g - p_a$. Da die Nullklassen aus R_i den Stellen von V_i i. a. eineindeutig entsprechen und die Nullklassen von R_i denen von R_0, so entsprechen die Stellen von V_i i. a. eineindeutig denen von V_0. Die Körper V_i entstehen daher aus V_0 durch birationale Transformation. Man kann sie geradezu als identisch annehmen. V_0 heißt die *Picardsche Mannigfaltigkeit von* K (vgl. [5]).

Da jeder Stelle von V_0 ein ganzer Divisor, i. a. ein Primteiler, $\mathfrak{C}$ von K entspricht, so müssen die Körper K und V_0 so miteinander algebraisch verbunden sein, daß der Körper (K, V_0), der durch Zusammenfügen von K und V_0 entsteht, die Dimension $\gamma + 1$ hat. Wird dann V_0 auf eine seiner Stellen, etwa auf s, abgebildet, so geht K in einen Körper der Dimension 1 über, nämlich in den Körper $\mathfrak{C}$, der s entspricht. Da $V_i = V_0$, so kann für $m > 1$ die algebraische Verknüpfung von K und V_0 auf mehr als eine Art, nämlich auf m Arten, so vorgenommen werden, daß einer Stelle von V_0 ein ganzer Divisor $\mathfrak{C}$ entspricht derart, daß $\mathfrak{C}/\mathfrak{C}_0$ ein Nulldivisor ist. Ob m größer als 1 sein kann, weiß ich nicht. Die Zahl würde eine Invariante von K sein.

§ 7. Die Picardsche Mannigfaltigkeit.

Den Stellen s_0, s, s_1 von V_0 mögen die Nullklassen (1), $(\mathfrak{R})$, $(\mathfrak{R}_1)$ aus R_0 entsprechen. Der Klasse $(\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1)$ entspreche die Stelle s' von V_0. Auf diese Art wird bei fest gehaltenem s_1 jeder Stelle s von V_0 eineindeutig eine Stelle s' zugeordnet, im besonderen der Stelle s_0 die Stelle s_1. Mit anderen Worten, es gibt eine birationale Transformation

von V_0 in sich. Diese ist vollkommen dadurch bestimmt, daß s_0 in s_1 übergehen soll. Da s_1 auf ∞^γ Arten gewählt werden kann, so gibt es ∞^γ birationale Transformationen des Körpers V_0 der Dimension γ in sich. Nach einem Satze von Picard ist daher V_0 ein Körper abelscher Funktionen von γ Veränderlichen u_i oder eine Entartung eines solchen. In dem hier vorliegenden Falle tritt eine Entartung nicht ein. Die Transformationen von V_0 in sich sind durch

$$u_i \to u_i + c_i$$

gegeben, wo die c_i konstant sind.

Die Stellen von V_0 können auch durch die Werte, die die u_i in ihnen haben, definiert werden, wobei zwei Stellen als gleich gelten, wenn die u_i sich nur durch eine Periode unterscheiden. Bei dieser Definition der Stellen ist das Entsprechen zwischen den Nullklassen von R_0 und den Stellen von V_0 *ausnahmslos* eineindeutig, während es bei der algebraischen Definition der Stellen für $\gamma \geqq 2$ vorkommt, daß unendlich vielen Stellen von V_0 nur eine Nullklasse entspricht.

Wir haben daher hier im wesentlichen dieselben Verhältnisse wie bei den Nullklassen eines Körpers der Dimension 1.

§ 8. Algebraisch zusammenhängende Divisoren und Klassen.

Gehören die ganzen Divisoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ derselben nicht zerfallenden Schar an, so ist $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$ oder, was dasselbe bedeutet, es ist $(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ Nullklasse. Das Umgekehrte gilt i. a. nicht. Aber es besteht folgender Satz von Severi ([4]):

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei ganze Divisoren, die algebraisch äquivalent sind, so daß $(\mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ Nullklasse ist, und daß

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}). \tag{31}$$

Für $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) > 0$ gibt es eine positive ganze Zahl λ so, daß $\mathfrak{A}^\lambda$ und $\mathfrak{B}^\lambda$ derselben nicht zerfallenden Schar angehören. Ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = 0$, so gibt es einen ganzen Divisor $\mathfrak{P}$ und eine ganze positive Zahl λ so, daß $\mathfrak{P}^\lambda \mathfrak{A}^\lambda$ und $\mathfrak{P}^\lambda \mathfrak{B}^\lambda$ derselben nicht zerfallenden Schar angehören.

Der Fall $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) < 0$ kann wegen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ nicht eintreten, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ teilerfremd sind, was man ja immer voraussetzen kann.

Severi hat folgende Bezeichnungen eingeführt ([4]):

1. Läßt sich der Divisor $\mathfrak{Q}$ in der Form

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{G}_1}{\mathfrak{G}_2}$$

schreiben, wo $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ganze, *nicht notwendig teilerfremde*, Divisoren sind, die derselben nicht zerfallenden Schar angehören, so *hängt $\mathfrak{Q}$ algebraisch mit 1 und $(\mathfrak{Q})$ mit (1) zusammen*, in Zeichen

$$\mathfrak{Q} \equiv 1, \quad (\mathfrak{Q}) \equiv (1).$$

2. Gilt für zwei Divisoren $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$

$$\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Q}_2} \equiv 1,$$

so *hängen sie und auch ihre Klassen algebraisch zusammen*, in Zeichen

$$\mathfrak{Q}_1 \equiv \mathfrak{Q}_2, \quad (\mathfrak{Q}_1) \equiv (\mathfrak{Q}_2).$$

3. Die r Divisoren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ heißen *algebraisch abhängig voneinander*, wenn es ganze Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ gibt, die nicht alle Null sind, so daß

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}_1^{\lambda_1} \mathfrak{C}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{C}_r^{\lambda_r} \equiv 1. \tag{32}$$

Mit Benutzung dieser Definitionen kann der im Anfang dieses Paragraphen angegebene Satz von Severi in der Form ausgesprochen werden:

Aus $\mathfrak{Q} \equiv 1$ *oder* $(\mathfrak{Q}) \equiv (1)$ *folgt* $\mathfrak{Q} \approx 1$, $(\mathfrak{Q}) \sim (1)$; *umgekehrt ergibt sich aus* $\mathfrak{Q} \approx 1$ *oder* $(\mathfrak{Q}) \sim (1)$, *daß es eine ganze Zahl* λ *gibt, so daß* $\mathfrak{Q}^\lambda \equiv 1$, $(\mathfrak{Q}^\lambda) \equiv (1)$.

Unter Verwendung der in § 5 eingeführten Bezeichnung ergibt sich noch:

Die Divisoren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ *sind dann und nur dann algebraisch abhängig, wenn sie algebraisch verbunden sind.*

Sind nämlich erstens die $\mathfrak{C}_k$ algebraisch abhängig, so gibt es nach Definition 3 ganze Zahlen λ_k, so daß (32) gilt. Daraus aber folgt $\mathfrak{Q} \approx 1$, und das bedeutet nach § 5, daß die $\mathfrak{C}_k$ algebraisch verbunden sind.

Sind zweitens die $\mathfrak{C}_k$ algebraisch verbunden, so gibt es ganze Zahlen μ_k, die nicht alle Null sind, so daß

$$\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{C}_1^{\mu_1}\, \mathfrak{C}_2^{\mu_2} \cdots \mathfrak{C}_r^{\mu_r} \approx 1.$$

Dann aber gibt es eine ganze Zahl λ so, daß $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0^\lambda \equiv 1$. Es gilt daher (32), wenn man $\lambda_k = \lambda \mu_k$ setzt. Das bedeutet aber, die $\mathfrak{C}_k$ sind algebraisch abhängig.

In Verbindung mit den Ergebnissen des § 4 können wir sagen:

Die folgenden drei Behauptungen über r Divisoren $\mathfrak{T}_i$ *besagen inhaltlich dasselbe*:

1. *Aus den* $\mathfrak{T}_i$ *läßt sich mindestens ein von* 1 *verschiedener Nulldivisor zusammensetzen.*
2. *Die* $\mathfrak{T}_i$ *sind algebraisch verbunden.*
3. *Die* $\mathfrak{T}_i$ *sind algebraisch abhängig.*

§ 9. Lineare Integrale dritter Gattung.

Nach Severi gilt

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{T}$ *ein Nulldivisor, so gibt es ein lineares Integral* w *dritter Gattung, das unendlich wird wie* $\log \mathfrak{T}$; *d. h. bei einer Stelle S mit den Ortsfunktionen u, v hat w die Darstellung*

$$w = \log \mathfrak{T}(u, v) + P(u, v),$$

wo $\mathfrak{T}(u, v)$ *die zugeordnete Funktion von* $\mathfrak{T}$ *für S ist, während P eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist.*

Nach § 8 folgt aus der Voraussetzung, daß es eine ganze Zahl λ so gibt, daß $\mathfrak{T}^\lambda = \mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$, wo $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ganze Divisoren sind, die derselben nicht zerfallenden Schar angehören. Dann gibt es auch eine *einfach* unendliche Schar $\langle \mathfrak{G} \rangle$, der $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ angehören. Der Körper, dessen Stellen die Divisoren dieser Schar eineindeutig zugeordnet sind, sei k. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ mögen den Stellen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ von k entsprechen. Der Körper $K^* = (K, k)$ ist von der Dimension 2, da K in einen Körper einer Dimension, nämlich in einen Divisor von $\langle \mathfrak{G} \rangle$, übergehen muß, wenn k auf eine seiner Stellen $\mathfrak{p}$ abgebildet wird. Da k Unterkörper von K^* ist, so entspricht jeder Stelle $\mathfrak{p}$ von k ein ganzer Divisor $\mathfrak{G}^*$ von K^*, der einem Büschel $\langle \mathfrak{G}^* \rangle$ angehört. Die Norm von $\mathfrak{G}^*$ in bezug auf K ist dann der Divisor $\mathfrak{G}$ der Schar $\langle \mathfrak{G} \rangle$, der $\mathfrak{p}$ zugeordnet ist. In k sei v ein Integral dritter Gattung, das nur logarithmisch unendlich wird, und zwar an den Stellen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ mit den Residuen $+1$ und -1. Es ist gleichzeitig lineares Integral aus K^*, das unendlich wird wie $\log (\mathfrak{G}_1^*/\mathfrak{G}_2^*)$. Die Spur von dv in bezug auf K sei λdw. Dann ist $\lambda \int dw$ ein lineares Integral dritter Gattung aus K, das unendlich wird wie $\log (\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2) = \lambda \log \mathfrak{T}$, so daß w unendlich wird wie $\log \mathfrak{T}$.

Definition. Die Divisoren $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu$ *sollen linear („linear" bezieht sich auf die Exponenten der in den* $\mathfrak{T}_i$ *enthaltenen Primteiler) unabhängig heißen, wenn der Divisor* $\mathfrak{T}_1^{\tau_1} \mathfrak{T}_2^{\tau_2} \cdots \mathfrak{T}_\mu^{\tau_\mu}$ *nur dann gleich* 1 *ist, wenn alle* τ_i *verschwinden.*

Satz 2. *Lassen sich aus den Primteilern*

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_m$$

μ linear unabhängige Nulldivisoren

$$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_\mu$$

bilden, und ist w_i ein lineares Integral dritter Gattung, das wie $\log \mathfrak{T}_i$ unendlich wird, so läßt sich jedes lineare Integral dritter Gattung, das nur logarithmisch und längs der $\mathfrak{P}_i$ unendlich wird, in der Form

$$w = \varrho_1 w_1 + \varrho_2 w_2 + \cdots + \varrho_\mu w_\mu + I \tag{33}$$

darstellen, wo die ϱ_i konstant sind, während I ein Integral erster Gattung ist.

Bei einer Stelle S sei

$$w = \sum_{k=1}^{m} s_k \log \mathfrak{P}_k(u, v) + P, \tag{34}$$

wo $\mathfrak{P}_k(u, v)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}_k$ für S ist, während P eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist. Die Konstante s_k heißt das *Residuum von w oder dw für $\mathfrak{P}_k$*. Nach dem Residuensatz besteht für jeden Divisor $\mathfrak{Q}$ die Gleichung

$$s_1(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_1) + s_2(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_2) + \cdots + s_m(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_m) = 0. \tag{35}$$

Diese Gleichungen mögen genau μ linear unabhängige Lösungen

$$\tau_{1i}, \tau_{2i}, \ldots, \tau_{mi}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

haben. Sie können und sollen ganzzahlig angenommen werden, da die Koeffizienten in (35) ganze Zahlen sind. Setzt man

$$\mathfrak{T}_i = \mathfrak{P}_1^{\tau 1i}\, \mathfrak{P}_2^{\tau 2i} \ldots \mathfrak{P}_m^{\tau mi},$$

so sind die $\mathfrak{T}_i$ linear unabhängig, und wegen (35) ist $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{T}_i) = 0$ für jeden Divisor $\mathfrak{Q}$. Die $\mathfrak{T}_i$ sind daher Nulldivisoren, und es gibt lineare Integrale w_i derart, daß w_i unendlich wird wie $\log \mathfrak{T}_i$. Da die s_k den Gleichungen (35) genügen, so gibt es Konstanten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\mu$ so, daß

$$s_k = \varrho_1 \tau_{k1} + \varrho_2 \tau_{k2} + \cdots + \varrho_\mu \tau_{k\mu}.$$

Das Integral $w_0 = \sum \varrho_i w_i$ wird also genau so unendlich wie w, so daß $w - w_0 = I$ ein Integral erster Gattung ist.

§ 10. Basen für Divisoren und Divisorenklassen.

Nach einem Satz von Picard ([6]), Bd. 2, S. 240 unten), gibt es eine Zahl ϱ mit der Eigenschaft:

Man kann ϱ Primteiler $\mathfrak{P}_i$ derart finden, daß es kein lineares Integral dritter Gattung gibt, das höchstens längs dieser $\mathfrak{P}_i$ logarithmisch unendlich wird, daß es aber immer ein Integral dritter Gattung gibt, daß höchstens längs dieser $\mathfrak{P}_i$ und längs irgendeines anderen Primteilers $\mathfrak{P}$ logarithmisch unendlich wird.

Diese Zahl ϱ heißt *Picardsche Zahl.* Sie ist nicht absolut invariant. Wohl aber ist die Zahl

$$\Pi = \varrho + (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}),$$

wo $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse bedeutet, absolut invariant. Sie wird *Picardsche Invariante* genannt.

In Verbindung mit den Sätzen des vorigen Paragraphen folgert Severi hieraus ([4]):

Satz 1. *Es gibt ϱ Primteiler oder auch Divisoren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\varrho$ derart, daß sie nicht voneinander algebraisch abhängen, daß aber jeder andere Divisor $\mathfrak{C}$ von ihnen algebraisch*

abhängt. D. h. es gibt ganze Zahlen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ *so, daß*

$$\mathfrak{C}^{\lambda} \approx \mathfrak{C}_1^{\lambda_1} \mathfrak{C}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{C}_\varrho^{\lambda_\varrho}. \tag{36}$$

Hier ist $\lambda \neq 0$ *und die* λ_i *sind dann und nur dann alle* 0, *wenn* $\mathfrak{C}$ *Nulldivisor ist.*

Statt (36) kann man auch schreiben

$$\mathfrak{C}^{\lambda} = \mathfrak{C}_1^{\lambda_1} \mathfrak{C}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{C}_\varrho^{\lambda_\varrho} \mathfrak{R}, \tag{37}$$

wo $\mathfrak{R}$ ein Nulldivisor ist.

Definition. ϱ Primteiler oder allgemeiner ϱ Divisoren, die nicht algebraisch voneinander abhängen, von denen aber jeder andere Divisor algebraisch abhängt, heißen nach Severi eine *Basis für die Divisoren* und ihre Klassen eine *Basis für die Klassen.*

Satz 2. ϱ *Divisoren bilden dann und nur dann eine Basis, wenn die Determinante ihrer Schnittzahlen von Null verschieden ist.*

Dabei bedeutet ϱ immer die Picardsche Zahl.

§ 11. Die Punktprimteiler.

1. *Punktprimteiler.* Gilt für einen Primteiler $\mathfrak{P}$

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}) = 0, \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{M}) = 0, \tag{38}$$

so haben wir ihn *Punktprimteiler* genannt. Ein Divisor, der nur solche Primteiler enthält, soll *Punktdivisor* heißen. Deutet man x, y, z in der den Körper K definierenden Gleichung $F(x, y, z) = 0$ als kartesische Koordinaten, also $F = 0$ als die Gleichung einer algebraischen Fläche F, so entstehen die Punktprimteiler aus den isolierten singulären Punkten von F oder aus den auf F liegenden Geraden, die parallel zur z-Achse sind. Ein isolierter singulärer Punkt, dessen Tangentenkegel das Geschlecht q hat, enthält z. B. einen Punktprimteiler vom Geschlechte q. Die Zahl der Punktprimteiler ist endlich. Sie seien bezeichnet mit

$$\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_m. \tag{39}$$

Bei geeigneter Definition der Stellen haben die Primteiler $\mathfrak{V}_k$ keine mehrfachen Stellen, so daß für das Geschlecht $\pi(\mathfrak{V}_k)$ von $\mathfrak{V}_k$ gilt

$$2\pi(\mathfrak{V}_k) - 2 = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_k \mathfrak{K}). \tag{40}$$

Da nach (38)

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{L}) = 0, \quad (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{M}) = 0, \tag{41}$$

so gehen x und y für $\mathfrak{V}_k = 0$ in Konstanten über, etwa in a_k und b_k, so daß

$$x \to a_k, \quad y \to b_k \quad \text{für} \quad \mathfrak{V}_k = 0. \tag{42}$$

2. *Die Punktprimteiler* $\mathfrak{V}_k$ *sind nicht voneinander algebraisch abhängig, oder, was dasselbe bedeutet, es läßt sich aus ihnen kein Nulldivisor zusammensetzen.*

Wäre die Behauptung nicht richtig, so würde es nach § 9 ein einfaches Integral dritter Gattung geben, das nur längs der $\mathfrak{V}_k$ unendlich werden könnte. Das wäre aber eine analytische Funktion von x, y, die nur an den Stellen (a_k, b_k) unendlich werden könnte und nicht in ihrer Umgebung. Das aber ist nicht möglich.

3. *Die Determinante der Schnittzahlen* $(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}_k)$ *ist nicht Null,*

$$|(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}_k)| \neq 0. \tag{43}$$

Macht man die Annahme, die Behauptung sei nicht richtig, so lassen sich ganze Zahlen λ_i, die nicht alle verschwinden, so bestimmen, daß

$$\lambda_1(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_1) + \lambda_2(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_2) + \cdots + \lambda_m(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_m) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Setzt man

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1^{\lambda_1} \mathfrak{V}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{V}_m^{\lambda_m}, \tag{44}$$

so ist hiernach

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}) = 0, \quad \text{also} \quad (\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}) = 0.$$

Da wegen (41) auch $(\mathfrak{L}, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{V}) = 0$, so ist $\mathfrak{V}$ nach § 4, Nr. 3 ein Nulldivisor, was nach 2. nicht sein kann.

4. *Für jeden Punktdivisor* $\mathfrak{V}$ *ist* $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) < 0$, *so daß im besonderen* $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_k) < 0$.

Erstens kann $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ nicht Null sein, da sonst $\mathfrak{V}$ Nulldivisor wäre. Zweitens zeigen wir indirekt, daß $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V})$ nicht größer als Null sein kann, machen also die *Annahme*

$$(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) > 0. \tag{45}$$

Setzt man, unter λ eine ganze Zahl verstehend,

$$r_\lambda = \{\mathfrak{V}^\lambda\} + \{\mathfrak{K}\mathfrak{V}^{-\lambda}\}, \tag{46}$$

so ist nach dem Riemann-Rochschen Satz

$$r_\lambda \geqq p_a + 1 + \frac{\lambda^2}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) - \frac{\lambda}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{K}),$$

so daß wegen (45) r_λ gleichzeitig mit $|\lambda|$ nach $+\infty$ geht. Die Klasse $(\mathfrak{V}^\lambda)$ kann höchstens *einen* ganzen Divisor enthalten, nämlich $\mathfrak{V}^\lambda$, wenn $\mathfrak{V}^\lambda$ ganz ist. Wäre noch ein anderer ganzer Divisor $\mathfrak{G}$ vorhanden, so würde $\mathfrak{G}/\mathfrak{V}^\lambda$ eine Funktion aus K sein, also eine analytische Funktion von x, y, und zwar eine, die höchstens an den Stellen (a_k, b_k) unendlich werden könnte, nicht aber in deren Umgebung. Das aber ist nicht möglich. Daher ist $\{\mathfrak{V}^\lambda\} \leqq 1$. Da das für positive und negative λ gilt, so folgt aus (46), daß sowohl $\{\mathfrak{K}\mathfrak{V}^{-\alpha}\}$ wie $\{\mathfrak{K}\mathfrak{V}^{+\alpha}\}$ mit α nach $+\infty$ gehen. Da aber das Produkt je eines ganzen Divisors aus $(\mathfrak{K}\mathfrak{V}^{-\alpha})$ und $(\mathfrak{K}\mathfrak{V}^{\alpha})$ ein ganzer Divisor aus dem Produkt dieser Klassen, also aus $(\mathfrak{K}^2)$ ist, so muß auch $\{\mathfrak{K}^2\}$ mit α nach $+\infty$ gehen. Da das unmöglich ist, so ist die Annahme (45) falsch.

5. *Ist* $\mathfrak{V}$ *ein ganzer Punktdivisor, so gibt es in* $\mathfrak{V}$ *mindestens einen Punktprimteiler* $\mathfrak{V}_\alpha$, *für den* $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}) < 0$.

Ist $\mathfrak{V}$ durch (44) mit $\lambda_i > 0$ gegeben, so ergibt sich die Behauptung daraus, daß nach 4. $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}) = \sum \lambda_i (\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}) < 0$.

6. *Der ganze Divisor* $\mathfrak{C}$ *habe mit dem Punktprimteiler* $\mathfrak{V}_\alpha$ *keinen Schnittpunkt, und es sei das Geschlecht von* $\mathfrak{V}_\alpha$ *größer als Null, so daß*

$$(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{C}) = 0, \quad \pi(\mathfrak{V}_\alpha) - 1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{V}_\alpha) + \frac{1}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{K}) \geqq 0. \tag{47}$$

Ferner sei die Klasse $(\mathfrak{C})$ *primitiv und*

$$\{\mathfrak{C}\} \geqq 2, \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) < 0. \tag{48}$$

Dann ist die Klasse $(\mathfrak{C})$ *nicht regulär.*

Der Beweis werde indirekt geführt, es werde also angenommen, $(\mathfrak{C})$ sei regulär, so daß

$$\{\mathfrak{C}\} = p_a + 1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{C}, \mathfrak{K}). \tag{49}$$

Wegen (47) und (48) ist

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{V}_\alpha \mathfrak{K}/\mathfrak{C}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{K}) - (\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) < 0.$$

Da nach (48) $\{\mathfrak{C}\} \geqq 2$ und da $(\mathfrak{C})$ primitiv, so ist daher $\{\mathfrak{V}_\alpha \mathfrak{K}/\mathfrak{C}\} = 0$, und es wird nach dem Riemann-Rochschen Satz

$$\left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{V}_\alpha}\right\} \geqq p_a + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{V}_\alpha}, \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{V}_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{V}_\alpha}, \mathfrak{K}\right)$$

oder wegen (47) und (49)

$$\left\{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{V}_\alpha}\right\} \geqq \{\mathfrak{C}\} + \pi(\mathfrak{V}_\alpha) - 1. \tag{50}$$

Da $(\mathfrak{V}_\alpha, \mathfrak{C}) = 0$ und da $(\mathfrak{C})$ als primitive Klasse nicht den Faktor $\mathfrak{V}_\alpha$ haben kann, so ist die Zahl der Bedingungen dafür, daß ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{C})$ durch $\mathfrak{V}_\alpha$ teilbar ist, gleich 1, und daher $\{\mathfrak{C}/\mathfrak{V}_\alpha\} = \{\mathfrak{C}\} - 1$. Das steht aber wegen (47) im Widerspruch zu (50). Die Annahme ist daher falsch und die Behauptung richtig.

Im besonderen ergibt sich: Hat die Fläche F einen isolierten singulären Punkt, dessen Tangentenkegel ein von 0 verschiedenes Geschlecht hat, und ist $\mathfrak{A}$ ein ebener Schnitt von F, so sind die Klassen $(\mathfrak{A}^\lambda)$ für genügend großes positives λ nicht regulär.

Um das einzusehen, hat man nur in dem eben bewiesenen Satz $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{A}^\lambda$ und λ so groß zu wählen, daß (48) gilt.

§ 12. Über die Picardsche Zahl ϱ und über Korrespondenzen.

1. **Satz I.** *Die Picardsche Zahl ϱ ist mindestens gleich* 2.

Es sei $\varrho = 1$. Dann ist jeder Primteiler $\mathfrak{P}$ mit $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) \neq 0$ eine Basis, so daß es ganze Zahlen $\lambda, \mu, \alpha, \beta$, von denen λ und μ nicht 0 sind, so gibt, daß

$$\mathfrak{L}^\lambda \approx \mathfrak{P}^\alpha, \quad \mathfrak{M}^\mu \approx \mathfrak{P}^\beta, \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0. \tag{51}$$

Wegen

$$(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = 0, \quad (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = n > 0 \tag{52}$$

folgt aus (51) durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$

$$\beta(\mathfrak{L}, \mathfrak{P}) = \mu n \neq 0, \quad \alpha(\mathfrak{M}, \mathfrak{P}) = \lambda n \neq 0, \quad \alpha(\mathfrak{L}, \mathfrak{P}) = \beta(\mathfrak{M}, \mathfrak{P}) = 0.$$

Die ersten beiden dieser Gleichungen widersprechen aber den beiden letzten, so daß, wie behauptet,

$$\varrho \geqq 2. \tag{53}$$

2. *K sei der Körper der rationalen Funktionen von x, y.*

Bei einfacher Stellendefinition in bezug auf x, y gilt für jeden Divisor $\mathfrak{Q}$

$$\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu,$$

so daß jeder Divisor sogar rational mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ verbunden ist. Wegen (53) folgt

Satz II. *In einem rationalen Körper ist bei einfacher Stellendefinition die Picardsche Zahl ϱ gleich* 2.

Da $\mathfrak{K} \sim \mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$, so ist wegen (52), da hier $n = 1$ ist, $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 8$. Für die Picardsche Invariante ergibt sich daher

$$\Pi = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + \varrho = 10. \tag{54}$$

Da der Wert von Π unabhängig von der Stellendefinition ist, so folgt aus (54) wegen (53)

Satz III. *Der Grad $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ der kanonischen Klasse $(\mathfrak{K})$ eines rationalen Körpers ist höchstens gleich* 8. *Die obere Grenze wird erreicht bei einfacher Stellendefinition.*

3. *Es sei $K = (A, B)$ gleich dem direkten Produkt der algebraischen Körper A, B der Dimension* 1.

Die Geschlechter von A und B seien a und b. Als unabhängige Veränderliche x, y von K sei eine Funktion aus A und eine aus B gewählt. Die Relativgrade von A und B in bezug auf x und y seien l und m, so daß der Grad von K in bezug auf x, y gleich $n = lm$ ist.

Die Stellen von K seien in folgender Weise definiert: Ist $\mathfrak{p}$ eine Stelle von A mit der Ortsfunktion u und $\mathfrak{q}$ eine von B mit der Ortsfunktion v, so ist $S = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ eine Stelle

von K mit den Ortsfunktionen u, v. Die Definition ist, wenn K rational ($a = b = 0$) oder halbrational (a oder $b = 0$) ist, eine einfache, sonst die einfachste.

Bildet man A auf die Stelle $\mathfrak{p}$ ab, so geht K in den Körper einer Dimension $\mathfrak{P} = (\mathfrak{p}, B)$ über, der mit B identisch ist. Auf diese Weise entspricht jedem Primteiler $\mathfrak{p}$ von A ein Primteiler $\mathfrak{P}$ von K mit der zugeordneten Funktion u. Wenn auch die Körper $\mathfrak{P}$ alle mit B identisch sind, so sind doch die Primteiler $\mathfrak{P}$ voneinander verschieden, da die Abbildung jedesmal eine andere ist. Die $\mathfrak{P}$ bilden ein Büschel $\langle\mathfrak{P}\rangle$ des Geschlechtes a von Primteilern des Geschlechtes b. Ebenso entspricht jeder Stelle $\mathfrak{q}$ von B ein Primteiler $\mathfrak{Q}$ von K, der einem Büschel $\langle\mathfrak{Q}\rangle$ des Geschlechtes b von Primteilern des Geschlechtes a angehört. Bezeichnet man die zu den Stellen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ von A und B gehörenden Primteiler auch mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so kann man auch sagen, die Primteiler $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ von A und B sind gleichzeitig Primteiler $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von K.

Da die Primteiler $\mathfrak{P}$ alle derselben nicht zerfallenden Schar angehören, so sind je zwei algebraisch miteinander verbunden, genauer, ihr Quotient ist ein Nulldivisor. Dasselbe gilt von den $\mathfrak{Q}$, so daß

$$\mathfrak{P}' \approx \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}' \approx \mathfrak{Q}. \tag{55}$$

Daher haben für jeden fest gewählten Divisor $\mathfrak{T}$ die Zahlen $(\mathfrak{T}, \mathfrak{P})$ und $(\mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ für alle $\mathfrak{P}$ aus $\langle\mathfrak{P}\rangle$ und alle $\mathfrak{Q}$ aus $\langle\mathfrak{Q}\rangle$ denselben Wert, so daß im besonderen $(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$, $(\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q})$. Ein Primteiler $\mathfrak{P}_i$, der $\mathfrak{p}_i$ entspricht, geht durch die Stellen $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q})$, wo $\mathfrak{q}$ die Stellen von B durchläuft, und nur durch diese. Daher ist $(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_k) = 0$. Ebenso folgt $(\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{Q}_k) = 0$. Die Primteiler $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ treffen einander nur in der Stelle $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$, und haben dort einen Schnittpunkt, da ihre zugeordneten Funktionen u und v sind. Also:

$$(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 0, \quad (\mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}) = 0, \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}) = 1. \tag{56}$$

Da der Nenner $\mathfrak{l}$ von x als Funktion aus A in l Primteiler $\mathfrak{p}$ zerfällt, so besteht $\mathfrak{L}$ aus l Primteilern $\mathfrak{P}$ und ebenso $\mathfrak{M}$ aus m Primteilern $\mathfrak{Q}$, so daß

$$\mathfrak{L} \approx \mathfrak{P}^l, \quad \mathfrak{M} \approx \mathfrak{Q}^m. \tag{57}$$

Für den Fall, daß $A = B$, also auch $a = b$, d. h. daß A und B birational ineinander transformierbar sind, sei $\mathfrak{N}$ der Primteiler, auf den K abgebildet wird, wenn man entsprechende Stellen von A und B zusammenfallen läßt. Die Stellen von $\mathfrak{N}$ sind also die Stellen $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ oder $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$. Hieraus folgt:

a) Wählt man als Ortsfunktionen u, v für zwei Stellen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, die einander entsprechen, Funktionen, die bei birationaler Transformation von A in B ineinander übergehen, so ist die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{N}$ für die Stelle $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = (\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ gleich $v - u$.

b) Die Stellen von $\mathfrak{N}$ entsprechen eineindeutig denen von A, so daß das Geschlecht von $\mathfrak{N}$ gleich a ist.

c) $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{N}$ treffen einander nur an der Stelle $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$, ebenso $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{N}$ nur an der Stelle $(\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ und haben dort je einen Schnittpunkt, da $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{N}$ die zugeordneten Funktionen $u, v, v - u$ haben. Daher ist

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{N}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{N}) = 1. \tag{58}$$

Sind $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ Divisoren aus den kanonischen Klassen von A und B, und bezeichnet man sie als Divisoren von K mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, so ist $\mathfrak{K} \sim \mathfrak{K}_1\mathfrak{K}_2$. Da $\mathfrak{k}_1$ die Ordnung $2a - 2$ und $\mathfrak{k}_2$ die Ordnung $2b - 2$ hat, so wird

$$\mathfrak{K} \approx \mathfrak{P}^{2a-2}\,\mathfrak{Q}^{2b-2}. \tag{59}$$

Wegen (56) folgt hieraus

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = 8(a - 1)(b - 1). \tag{60}$$

Für den Fall, wo $A = B$, also $a = b$, werde noch $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$ bestimmt. Da $\mathfrak{N}$ das Geschlecht a und keine mehrfachen Stellen hat, so ist wegen (58) und (59)

$$2a - 2 = (\mathfrak{N}, \mathfrak{N}\mathfrak{R}) = (\mathfrak{N}, \mathfrak{N}) + 4a - 4,$$

also

$$(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}) = 2 - 2a. \tag{61}$$

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Divisor aus K und $\mathfrak{p}$ eine Stelle von A, der in K der Primteiler $\mathfrak{P}$ entspricht. Für $\mathfrak{P} = 0$ geht $\mathfrak{H}$ in einen Divisor $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{P}$ über, der, da $\mathfrak{P}$ mit B identisch ist, auch ein Divisor von B ist. Auf diese Art entspricht jeder Stelle $\mathfrak{p}$ oder jedem Primteiler $\mathfrak{p}$ von A ein Divisor $\mathfrak{h}$ der Ordnung $(\mathfrak{H}, \mathfrak{P})$ von B. In derselben Weise entspricht jeder Stelle $\mathfrak{q}$ von B ein Divisor $\mathfrak{h}'$ der Ordnung $(\mathfrak{H}, \mathfrak{Q})$ von A. Allgemeiner entspricht jedem Divisor von A einer von B und umgekehrt. Diese Beziehung zwischen A und B heißt *die durch $\mathfrak{H}$ vermittelte Korrespondenz zwischen A und B* und sei mit $C(\mathfrak{H})$ bezeichnet (vgl. für das Folgende auch [7], [8]). Das gilt auch dann, wenn in $\mathfrak{H}$ Primteiler $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ vorkommen. Darauf sei nicht näher eingegangen. Ist im besonderen $\mathfrak{H} = 1$, so wird jedem Divisor von A der Divisor 1 von B zugeordnet und umgekehrt jedem Divisor von B der Divisor 1 von A. Im Falle $A = B$ kann $C(\mathfrak{H})$ auch als Korrespondenz von A auf sich aufgefaßt werden.

Versteht man unter dem Produkt zweier Korrespondenzen $C(\mathfrak{H}_1)$ und $C(\mathfrak{H}_2)$ die Korrespondenz $C(\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2)$, so daß

$$C(\mathfrak{H}_1)\,C(\mathfrak{H}_2) = C(\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2), \tag{62}$$

so bilden die $C(\mathfrak{H})$ eine abelsche Gruppe, bei der $C(1)$ die Einheit ist. Einige Untergruppen von G seien hervorgehoben: Die Gruppen der $C(\mathfrak{H})$, wo

$$\mathfrak{H} \sim 1, \quad \mathfrak{H} \approx 1, \quad \mathfrak{H} \approx \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\prime\prime}, \quad \mathfrak{H} \approx \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu}\mathfrak{N}^{-\nu},$$

seien der Reihe nach mit G_1, G_2, G_3, G_4 bezeichnet. G_4 existiert natürlich nur für $A = B$. Rechnet man diejenigen Korrespondenzen als gleich, die der Gruppe G_i angehören, so wird G auf G/G_i reduziert.

Ist ϱ die Picardsche Zahl und sind $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_\varrho$ algebraisch unabhängige Divisoren, so gibt es für jeden Divisor $\mathfrak{H}$ ganze Zahlen $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho$, wo $\lambda \neq 0$, so daß

$$\mathfrak{H}^{\lambda} = \mathfrak{H}_1^{\lambda_1}\,\mathfrak{H}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{H}_\varrho^{\lambda_\varrho}\,\mathfrak{R},$$

wo $\mathfrak{R}$ Nulldivisor ist. Daraus folgt

$$C(\mathfrak{H})^{\lambda} = C(\mathfrak{H}_1)^{\lambda_1}\,C(\mathfrak{H}_2)^{\lambda_2} \cdots C(\mathfrak{H}_\varrho)^{\lambda_\varrho}\,C(\mathfrak{R}).$$

Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ je ein Divisor aus $\langle\mathfrak{P}\rangle$ und $\langle\mathfrak{Q}\rangle$, so sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ algebraisch unabhängig, da nach (56) die Determinante ihrer Schnittzahlen gleich -1 ist. Schließt man den Fall $a = b = 0$ aus, also den Fall, wo K rational ist, so sind für $A = B$ die Primteiler $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{N}$ algebraisch unabhängig, da nach (56), (58), (61) die Determinante ihrer Schnittzahlen gleich $2a$ ist. Daher kann man wählen

$$\mathfrak{H}_{\varrho-1} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{H}_\varrho = \mathfrak{Q}, \qquad \text{wenn} \quad A \neq B,$$

und

$$\mathfrak{H}_{\varrho-2} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{H}_{\varrho-1} = \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{H}_\varrho = \mathfrak{N}, \qquad \text{wenn} \quad A = B.$$

Rechnet man also z. B. für $A \neq B$ alle Korrespondenzen als gleich, die der Gruppe G_3 angehören, so erhält man alle verschiedenen $C(\mathfrak{H})$ aus

$$C(\mathfrak{H})^{\lambda} = C(\mathfrak{H}_1)^{\lambda_1}\,C(\mathfrak{H}_2)^{\lambda_2} \cdots C(\mathfrak{H}_{\varrho-2})^{\lambda_{\varrho-2}}.$$

Nach der Theorie der Korrespondenzen bestehen folgende Sätze und Definitionen:

a) Entspricht bei der Korrespondenz $C(\mathfrak{H})$ einem Nulldivisor von A immer ein Divisor der Hauptklasse von B, so entspricht auch umgekehrt einem Nulldivisor von B

immer ein Divisor der Hauptklasse von A. Man sagt von einer solchen Korrespondenz, sie hat die *Wertigkeit* 0.

b) Entspricht im Falle $A = B$ bei der Korrespondenz $C(\mathfrak{H})$ einem Nulldivisor $\mathfrak{r}$ von A immer ein Divisor der Klasse $(\mathfrak{r}^{-\nu})$, wo die ganze Zahl ν nicht von $\mathfrak{r}$ abhängt, so entspricht auch jedem Nulldivisor $\mathfrak{s}$ von B ein Divisor der Klasse $(\mathfrak{s}^{-\nu})$. Es ist zu beachten, daß für $A = B$ jeder Divisor aus A auch Divisor aus B ist und umgekehrt. Man sagt von einer solchen Korrespondenz, sie hat die *Wertigkeit* ν.

c) Nach Hurwitz bestehen zwischen A und B nur dann Korrespondenzen ohne Wertigkeit, wenn A und B Besonderheiten haben, die sich als Gleichungen zwischen den Perioden der Integrale erster Gattung ausdrücken lassen.

d) Hat die Korrespondenz $C(\mathfrak{H})$ die Wertigkeit ν, so besteht eine Äquivalenz

$$\mathfrak{H}\mathfrak{N}^{\nu} \sim PQ, \tag{63}$$

wo P nur Primteiler $\mathfrak{P}$ und Q nur Primteiler $\mathfrak{Q}$ enthält; es gilt also eine algebraische Äquivalenz der Form

$$\mathfrak{H}\mathfrak{N}^{\nu} \approx \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu}. \tag{64}$$

Das gilt auch für $\nu = 0$.

e) Besteht umgekehrt eine Äquivalenz der Form (63), so hat die Korrespondenz $C(\mathfrak{H})$ die Wertigkeit ν.

Daraus ergibt sich:

f) Hat $C(\mathfrak{H})$ die Wertigkeit ν, so hat $C(\mathfrak{H}\mathfrak{N}^{\nu})$ die Wertigkeit 0. Ist $\mathfrak{H}_1 \sim \mathfrak{H}_2$, so haben die Korrespondenzen $C(\mathfrak{H}_1)$ und $C(\mathfrak{H}_2)$ dieselbe Wertigkeit, oder sie sind beide ohne Wertigkeit.

Dafür, daß $C(\mathfrak{H})$ die Wertigkeit 0 hat, ist nach (64) notwendig, daß sich ganze Zahlen λ, μ so bestimmen lassen, daß der Divisor

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{H}\mathfrak{P}^{-\lambda}\mathfrak{Q}^{-\mu} \tag{65}$$

Nulldivisor ist. Nach § 4, Nr. 3 ist dazu notwendig und hinreichend, daß

$$(\mathfrak{L}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) = 0,$$

wofür man hier wegen (57) auch $(\mathfrak{P}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) = 0$ schreiben kann. In Anwendung auf (65) ergeben sich wegen (56) die Gleichungen

$$\lambda = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{H}), \quad \mu = (\mathfrak{P}, \mathfrak{H}), \quad (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) - 2\lambda(\mathfrak{P}, \mathfrak{H}) - 2\mu(\mathfrak{Q}, \mathfrak{H}) + 2\lambda\mu = 0. \tag{66}$$

Setzt man

$$Z(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) - 2(\mathfrak{P}, \mathfrak{H})(\mathfrak{Q}, \mathfrak{H}), \tag{67}$$

so folgt aus (66), daß sich λ und μ dann und nur dann so bestimmen lassen, daß $\mathfrak{T}$ in (65) Nulldivisor wird, wenn $Z(\mathfrak{H}) = 0$ ist. Für den Fall, daß $\mathfrak{H}$ ein Primteiler ist, hat Severi gezeigt, (vgl. [7], S. 61), daß aus $Z(\mathfrak{H}) = 0$ noch mehr folgt, nämlich, daß $C(\mathfrak{H})$ die Wertigkeit 0 hat, oder, was nach d) und e) dasselbe bedeutet, daß eine Äquivalenz der Form (63) mit $\nu = 0$ besteht. Hier soll bewiesen werden, daß dies auch gilt, wenn $\mathfrak{H}$ irgendein Divisor ist, also der

Satz IV. *$Z(\mathfrak{H}) = 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß*

1. *$\mathfrak{H} \approx \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu}$, daß also $C(\mathfrak{H})$ der Gruppe G_3 angehört.*
2. *$C(\mathfrak{H})$ die Wertigkeit 0 hat, daß also*

$$\mathfrak{H} \sim PQ, \tag{68}$$

wo P nur Primteiler aus $\langle\mathfrak{P}\rangle$ und Q nur solche aus $\langle\mathfrak{Q}\rangle$ enthält.

Den ersten Teil dieses Satzes haben wir schon bewiesen, und von dem zweiten den einen Teil, daß nämlich $Z(\mathfrak{H}) = 0$ notwendig für das Bestehen von (68) ist. Es bleibt

noch zu zeigen, daß aus $Z(\mathfrak{H}) = 0$ oder, was damit gleichwertig ist, aus dem Bestehen einer algebraischen Äquivalenz der Form

$$\mathfrak{H} \approx \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu} \tag{69}$$

folgt, daß $C(\mathfrak{H})$ die Wertigkeit 0 hat, oder, was dasselbe bedeutet, daß eine rationale Äquivalenz (68) besteht. Die Äquivalenz (69) kann auch als rationale Äquivalenz

$$\mathfrak{H} \sim \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu}\mathfrak{R} \tag{70}$$

geschrieben werden, wo $\mathfrak{R}$ einen Nulldivisor bedeutet. Durch Vergleich mit (68) zeigt sich, daß der Satz bewiesen ist, wenn der folgende gilt:

Satz V. *Jeder Nulldivisor* $\mathfrak{R}$ *aus* $K = (A, B)$ *ist äquivalent zu einem Divisor der Form*

$$\mathfrak{P}_1^{\alpha_1}\mathfrak{P}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{P}_r^{\alpha_r}\mathfrak{Q}_1^{\beta_1}\mathfrak{Q}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{Q}_s^{\beta_s} = PQ. \tag{71}$$

Das ist tatsächlich der Fall, wie wir zeigen wollen. Wie wir wissen, ist PQ dann und nur dann Nulldivisor, wenn $(\mathfrak{P}, PQ) = (\mathfrak{Q}, PQ) = (PQ, PQ) = 0$, also wegen (56) dann und nur dann, wenn

$$\sum \alpha_i = 0, \quad \sum \beta_i = 0. \tag{72}$$

Sind $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ die $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{Q}_i$ in A und B entsprechenden Primteiler, so sind nach § 1 die Divisoren

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1}\mathfrak{p}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{\alpha_r}, \quad \mathfrak{s} = \mathfrak{q}_1^{\beta_1}\mathfrak{q}_2^{\beta_2}\cdots\mathfrak{q}_s^{\beta_s}$$

dann und nur dann Nulldivisoren aus A und B, wenn (72) gilt. Ist daher $(\mathfrak{r})$ Nullklasse aus A und $(\mathfrak{s})$ eine aus B, so ist $(\mathfrak{r})(\mathfrak{s}) = (\mathfrak{r}\mathfrak{s})$, aufgefaßt als Klasse aus K, eine aus $K = (A, B)$. Nach § 1 sind die Nullklassen aus A den Stellen der Riemannschen Mannigfaltigkeit M der Dimension a von A eineindeutig zugeordnet, und die Nullklassen von B den Stellen der Riemannschen Mannigfaltigkeit N der Dimension b von B, so daß die Nullklassen von K, soweit sie die Form $(\mathfrak{r}\mathfrak{s})$ haben, den Stellen des Körpers $V = (M, N)$ eineindeutig zugeordnet sind. Da die Dimension dieses Körpers gleich $a + b$, also gleich dem linearen Geschlecht γ von K ist, so ist er die Picardsche Mannigfaltigkeit von K. Daraus ist zu vermuten, daß alle Nullklassen von K die Form $(\mathfrak{r}\mathfrak{s})$ haben, daß also jeder Nulldivisor von K einem Divisor der Form (71) äquivalent ist. Den Beweis zerlegen wir in einzelne Schritte.

a) Bei der gewählten Definition der Stellen gibt es in K keine Punktprimteiler.

Aus der Annahme, $\mathfrak{V}$ sei ein Punktprimteiler, folgt $(\mathfrak{L}, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{V}) = 0$ oder wegen (57) $(\mathfrak{P}, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{V}) = 0$. Dann aber müßte $\mathfrak{V}$ sowohl ein Primteiler aus $\langle\mathfrak{P}\rangle$ wie aus $\langle\mathfrak{Q}\rangle$ sein, was nicht möglich ist.

b) Der Rang der Klasse $(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$, wo $\mathfrak{R}$ ein Nulldivisor aus K sein soll, wächst mit α und β über alle Grenzen.

Das ergibt sich aus dem Riemann-Rochschen Satz.

c) Die Klassen $(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$ sind für genügend große α, β primitiv. Nimmt man an, die Behauptung sei falsch, so gibt es einen Primteiler $\mathfrak{V}$, der in allen Klassen $(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$ bei positivem α und β auftritt, sodaß

$$\{\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}\} = \{\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}/\mathfrak{V}\}. \tag{73}$$

Nach [8], S. 137 unten, gibt es Zahlen α_0, β_0 so, daß die Größen

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}] = \{\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}, \mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}/\mathfrak{R}),$$

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}/\mathfrak{V}] = \{\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}/\mathfrak{V}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}/\mathfrak{V}, \mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}/\mathfrak{V}\mathfrak{R})$$

für $\alpha \geqq \alpha_0$, $\beta \geqq \beta_0$ von α und β unabhängig sind. Dasselbe gilt dann von ihrer Differenz, also wegen (73) von

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}, \mathfrak{V}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}\mathfrak{K}) = \alpha(\mathfrak{L}, \mathfrak{V}) + \beta(\mathfrak{M}, \mathfrak{V}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}\mathfrak{K}),$$

so daß $(\mathfrak{L}, \mathfrak{V}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{V}) = 0$ sein muß, was nach a) nicht möglich ist.

d) Die Klassen $(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$ enthalten für genügend große α, β Primteiler.

Nach c) sind die Klassen $(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$ für genügend große α, β primitiv, ihr Rang ist also mindestens gleich 2; nach b) kann er sogar beliebig groß angenommen werden. Wenn alle ganzen Divisoren einer solchen Klasse zerfallen, so bestehen sie aus Primteilern desselben Büschels und haben keine oder nur feste Schnittpunkte. Würde also keine der Klassen $(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$ einen Primteiler enthalten, so müßten auch die ganzen Divisoren der Klassen

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha+\lambda}\mathfrak{M}^{\beta+\mu}) = (\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})(\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$$

nur feste Schnittpunkte haben, wenn $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Dasselbe müßte dann von den ganzen Divisoren der Klassen $(\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$ gelten. Das aber ist sicher nicht der Fall, da in der Klasse $(\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$ unter anderen ganzen Divisoren die Zähler der Polynome von x, y des Grades (λ, μ) vorkommen.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich der Beweis des Satzes V führen. Es sei $\mathfrak{R}$ irgendein Nulldivisor aus K und $\mathfrak{H}$ ein Primteiler aus $(\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$, so daß

$$(74) \qquad \mathfrak{R} \sim \mathfrak{H}\mathfrak{L}^{-\alpha}\mathfrak{M}^{-\beta}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{H} \approx \mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta} \approx \mathfrak{P}^{\alpha l}\mathfrak{Q}^{\beta m}.$$

Da $\mathfrak{H}$ Primteiler ist, folgt hieraus nach dem Satze von Severi, daß $\mathfrak{H}$ einem Divisor der Form (71) äquivalent ist. Dann gilt aber wegen (74) dasselbe von $\mathfrak{R}$, da $\mathfrak{L}$ aus Primteilern $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{M}$ aus Primteilern $\mathfrak{Q}$ besteht.

Dieser Beweis ist gewiß nicht schön. Schöner wäre es, wenn man den Satz unmittelbar aus der Tatsache ableiten könnte, daß die Picardsche Mannigfaltigkeit von $K = (A, B)$ gleich dem direkten Produkt aus den Riemannschen Mannigfaltigkeiten von A und B ist.

Aus dem Bewiesenen ergibt sich allgemeiner:

Satz VI. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Korrespondenz* $C(\mathfrak{H})$ *die Wertigkeit* ν *hat, ist* $Z(\mathfrak{H}\mathfrak{R}^{\nu}) = 0$.

Die Sätze IV und VI lassen sich auch in der Form aussprechen:

Satz VII. *Die Gruppe* G_3 *enthält die Korrespondenzen der Wertigkeit* 0 *und nur diese.*

Satz VIII. *Die Gruppe* G_4 *enthält die Korrespondenzen mit Wertigkeit und nur diese.*

Bestehen zwischen den Körpern A und B nur Wertigkeitskorrespondenzen, so gilt hiernach für jeden Divisor $\mathfrak{H}$ aus $K = (A, B)$ entweder $\mathfrak{H} \approx \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu}$ oder $\mathfrak{H} \approx \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu}\mathfrak{R}^{-\nu}$, je nachdem $A \neq B$ oder $A = B$. Da, wie schon oben nachgewiesen, im ersten Falle $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ und im zweiten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ algebraisch nicht verbunden sind, so folgt:

Satz IX. *Bestehen zwischen den Körpern* A *und* B *nur Wertigkeitskorrespondenzen, so ist die Picardsche Zahl* ϱ *des Körpers* $K = (A, B)$ *bei einfacher oder einfachster Stellendefinition gleich* 2, *wenn* $A \neq B$, *und gleich* 3, *wenn* $A = B$.

Da, wie wir bewiesen haben, aus $\mathfrak{H} \approx \mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu}\mathfrak{R}^{-\nu}$ umgekehrt folgt, daß $C(\mathfrak{H})$ eine Wertigkeitskorrespondenz ist, so ergibt sich

Satz X. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwischen* A *und* B *Korrespondenzen ohne Wertigkeit bestehen, ist, daß die Picardsche Zahl* ϱ *des Körpers* $K = (A, B)$ *bei einfacher oder einfachster Stellendefinition größer ist als* 2, *wenn* $A \neq B$, *und größer als* 3, *wenn* $A = B$.

Zum Schluß sei noch der Fall betrachtet, wo das Geschlecht a von A gleich 0 ist, während $b > 0$, wo also K halbrational ist. In diesem Fall haben alle Korrespondenzen zwischen A und B die Wertigkeit 0. Denn einem Nulldivisor von B entspricht in jeder Korrespondenz ein Nulldivisor von A; dieser gehört aber immer der Hauptklasse an, wenn A vom Geschlechte 0 ist. Daher ist in halbrationalen Körpern die Picardsche Zahl ϱ bei einfacher Stellendefinition gleich 2. Wegen (60) hat also die Picardsche Invariante den Wert

$$\Pi = (\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) + \varrho = 10 - 8b. \tag{75}$$

Da Π bei Stellentransformation invariant ist und immer $\varrho \geqq 2$, so folgt

Satz XI. *In einem halbrationalen Körper des Geschlechtes $b = -p_a$ gilt für den Grad $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K})$ der kanonischen Klasse $(\mathfrak{K})$*

$$(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) \leqq 8(1 - b) = 8(p_a + 1); \tag{76}$$

das Gleichheitszeichen steht bei einfacher Stellendefinition.

§ 13. Über Büschel von Primteilern.

Definition. Ist $a = (a_{ik})$ eine quadratische Matrix, so wollen wir sagen, sie *zerfällt vollkommen*, wenn sie aus zwei quadratischen Matrizen diagonal zusammengesetzt ist und die übrigen Elemente Nullen sind, oder wenn sie durch Vertauschung der Zeilen und *dieselbe* Vertauschung der Spalten auf diese Form gebracht werden kann.

Hilfssatz. Die quadratische Matrix $a = (a_{ik})$ der Ordnung r habe folgende Eigenschaften:

1. $a_{ik} = a_{ki}$,
2. $a_{ik} \geqq 0$ *für* $i \neq k$,
3. *Die Gleichung $\alpha a = 0$ hat eine Lösung α mit $\alpha_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Dann zerfällt a dann und nur dann vollkommen, wenn der Rang von a höchstens gleich $r - 2$ ist.

1. Es zerfalle a vollkommen. Die Anordnung der Elemente von a sei so gewählt, daß a aus den Matrizen a_1 und a_2 der Ordnung r_1 und r_2 diagonal zusammengesetzt ist. Ist $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$, wo $\alpha^{(1)}$ die ersten r_1 und $\alpha^{(2)}$ die letzten r_2 Elemente von α enthält, so folgt aus $\alpha a = 0$, daß $\alpha^{(1)} a_1 = 0$, $\alpha^{(2)} a_2 = 0$. Wegen $\alpha_i > 0$ hat daher a_i höchstens den Rang $r_i - 1$ und a höchstens den Rang $r_1 - 1 + r_2 - 1 = r - 2$.

2. Die Matrix a zerfalle nicht vollkommen. Um zu zeigen, daß ihr Rang dann gleich $r - 1$ ist, genügt es nachzuweisen, daß aus einer Gleichung $\beta a = 0$ folgt, daß die β_i den α_i proportional sind. Zur formalen Vereinfachung sei gesetzt

$$\alpha_i a_{ik} = c_{ik}, \qquad \beta_i = \alpha_i \gamma_i. \tag{77}$$

Wegen $\alpha_i > 0$, $a_{ik} \geqq 0$ für $i \neq k$ ist auch $c_{ik} \geqq 0$ für $i \neq k$. Nach Voraussetzung und nach Annahme bestehen dann die Gleichungen

$$c_{1k} + c_{2k} + \cdots + c_{rk} = 0,$$
$$\gamma_1 c_{1k} + \gamma_2 c_{2k} + \cdots + \gamma_r c_{rk} = 0,$$

aus denen durch Elimination der c_{ii} folgt

$$\begin{aligned}
&(\gamma_2 - \gamma_1) c_{21} + (\gamma_3 - \gamma_1) c_{31} + \cdots + (\gamma_r - \gamma_1) c_{r1} = 0,\\
&(\gamma_1 - \gamma_2) c_{12} + (\gamma_3 - \gamma_2) c_{32} + \cdots + (\gamma_r - \gamma_2) c_{r2} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(\gamma_1 - \gamma_r) c_{1r} + (\gamma_2 - \gamma_r) c_{2r} + \cdots + (\gamma_{r-1} - \gamma_r) c_{r-1,r} = 0.
\end{aligned} \tag{78}$$

Die Anordnung der Elemente von a sei so gewählt, daß

$$\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \cdots \leqq \gamma_r.$$

Es sei etwa $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_\lambda, \gamma_i > \gamma_\lambda$ für $i > \lambda$. Da $c_{ik} \geqq 0$ für $i \neq k$, so ergibt sich aus den ersten λ Gleichungen (78)

$$c_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad i > \lambda,\ k \leqq \lambda$$

und hieraus wegen (77), da $\alpha_i > 0$,

$$a_{ik} = a_{ki} = 0 \quad \text{für} \quad i > \lambda,\ k \leqq \lambda.$$

Das aber bedeutet, daß a vollkommen zerfallen würde, wenn nicht $\lambda = r$ ist. Daher muß $\lambda = r$ sein, so daß die γ_i alle einander gleich sind. Bezeichnet man diesen gemeinsamen Wert mit δ, so ist nach (77) $\beta_i = \delta\alpha_i$, so daß die β_i den α_i proportional sind. Die Matrix a hat daher genau den Rang $r - 1$. Das gilt auch, wenn $\delta = 0$ sein sollte.

Es sei $\langle \mathfrak{P} \rangle$ ein Büschel des Geschlechtes p von ganzen Divisoren, die i. a. Primteiler sind. Es soll also nicht ausgeschlossen sein, daß endlichviele der Divisoren $\mathfrak{P}$ zerfallen. Von den Primteilern, die ganze Divisoren aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ sind oder in einem der zerfallenden $\mathfrak{P}$ enthalten sind, sagen wir, *sie gehören zu* $\langle \mathfrak{P} \rangle$. Der Körper, dessen Stellen $\mathfrak{p}$ die Divisoren aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ eineindeutig zugeordnet sind, heiße K_1. Da K_1 in K enthalten ist, so kann man eine Funktion aus K_1 als die eine unabhängige Veränderliche x wählen, so daß K_1 alle die Funktionen von K enthält, die nur von x abhängen. Das Geschlecht von K_1 ist p. Für $p > 0$ haben die Divisoren aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ keine Schnittpunkte. Wenn $p = 0$, können sie feste Schnittpunkte haben. Durch passende Abänderung der Stellendefinition kann man diese zum Verschwinden bringen. *Es werde ausdrücklich vorausgesetzt, daß* $\langle \mathfrak{P} \rangle$ *keine Basispunkte hat.*

Für zwei Divisoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ und für jeden Divisor $\mathfrak{C}$ gilt (vgl. § 12),

$$(79) \qquad (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}') = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = 0, \quad (\mathfrak{P}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{P}', \mathfrak{C}).$$

Ist $\mathfrak{P}_0$ einer der zerfallenden Divisoren aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$, und ist etwa

$$(80) \qquad \mathfrak{P}_0 = \mathfrak{A}_1^{\alpha_1} \mathfrak{A}_2^{\alpha_2} \cdots \mathfrak{A}_r^{\alpha_r}, \quad \alpha_i > 0,$$

so ist $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{P}) = 0$, da $\mathfrak{P}_0$ keinen der anderen Divisoren $\mathfrak{P}$ trifft. Wegen (79) gilt das auch für $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$. Wenn $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{P}_0$ verschieden ist und auch zerfällt, so folgt aus $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{P}) = 0$, daß auch $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}) = 0$, wenn $\mathfrak{A}$ ein in $\mathfrak{P}$ enthaltener Primteiler ist. Also:

$\mathfrak{P}_0$ sei ein zerfallender Divisor aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ und durch (80) gegeben. Ferner sei $\mathfrak{P}_k$ ein von $\mathfrak{P}_0$ verschiedener Divisor aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ und $\mathfrak{T}_k$ ein Divisor, der nur Primteiler enthält, die in $\mathfrak{P}_k$ vorkommen, der also im besonderen eine Potenz von $\mathfrak{P}_k$ ist, wenn $\mathfrak{P}_k$ Primteiler ist. Dann gilt

$$(81) \qquad (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{P}_k) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{P}_0) = (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{T}_k) = 0.$$

Da $\mathfrak{P}_0$ stetig in einen *Primteiler* $\mathfrak{P}$ übergehen kann, so müssen die $\mathfrak{A}_i$ durch Schnittpunkte miteinander zusammenhängen. Das bedeutet, die Matrix $a = (a_{ik})$ der Schnittzahlen $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_k) = a_{ik} = a_{ki}$ zerfällt nicht vollkommen. Da für $i \neq k$ die Zahl a_{ik} als Zahl der Schnittpunkte zweier verschiedener Primteiler nicht negativ sein kann, da ferner nach (80) und (81) $\alpha a = 0$, so folgt aus dem Hilfssatz, daß a den Rang $r - 1$ hat. Aus einer Gleichung $\beta a = 0$, in der die β_i nicht alle 0 sind, ergibt sich daher, daß die β_i den α_i proportional sind. Damit können wir beweisen:

Satz I. *Ist* $\langle \mathfrak{P} \rangle$ *ein Büschel ohne Basispunkte von ganzen Divisoren, die i. a. Primteiler sind, ist ferner* $\mathfrak{T}$ *ein Nulldivisor, der nur Primteiler enthält, die zu* $\langle \mathfrak{P} \rangle$ *gehören, so gibt es eine ganze Zahl* λ *so, daß*

$$(82) \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{P}_0^{\tau_0} \mathfrak{P}_1^{\tau_1} \cdots \mathfrak{P}_{m-1}^{\tau_{m-1}}, \quad wo \quad \Sigma\tau_i = 0$$

und wo die $\mathfrak{P}_i$ *ganze Divisoren aus* $\langle \mathfrak{P} \rangle$ *sind. Umgekehrt ist jeder Divisor* $\mathfrak{T}$, *für den eine Gleichung der Form* (82) *besteht, ein Nulldivisor.*

Der zweite Teil dieses Satzes ergibt sich daraus, daß nach (79) und (82) für jeden Divisor $\mathfrak{C}$ gilt

$$(\mathfrak{C}, \mathfrak{T}^{\lambda}) = \lambda(\mathfrak{C}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{C}, \mathfrak{P})\, \Sigma\tau_i = 0.$$

Zum Beweise des ersten Teils sei $\mathfrak{T}$ in der Form geschrieben

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 \mathfrak{T}_1 \cdots \mathfrak{T}_{m-1}, \tag{83}$$

wo $\mathfrak{T}_i$ nur Primteiler aus dem Divisor $\mathfrak{P}_i$ von $\langle \mathfrak{P} \rangle$ enthalten soll. $\mathfrak{P}_0$ sei durch (82) gegeben, und es sei

$$\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{A}_1^{\beta_1} \mathfrak{A}_2^{\beta_2} \cdots \mathfrak{A}_r^{\beta_r}.$$

Da $\mathfrak{T}$ Nulldivisor ist, so ist $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{T}) = 0$, woraus wegen (81) und (83) folgt, daß $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{T}_0) = 0$ oder $\beta a = 0$. Hieraus aber ergibt sich, daß es ganze Zahlen σ_0 und λ_0 so gibt, daß $\beta = \frac{\sigma_0}{\lambda_0}\alpha$, also $\mathfrak{T}_0^{\lambda_0} = \mathfrak{P}_0^{\sigma_0}$. Ebenso folgt, daß es ganze Zahlen σ_i und λ_i so gibt, daß $\mathfrak{T}_i^{\lambda_i} = \mathfrak{P}_i^{\sigma_i}$. Versteht man unter λ das kleinste gemeinsame Vielfache der λ_i, so ergibt sich hieraus eine Darstellung der Form (82) für $\mathfrak{T}^{\lambda}$.

Zusatz 1. *Ist $\mathfrak{P}_0$ ein zerfallender Divisor aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$, so sind die in $\mathfrak{P}_0$ enthaltenen Primteiler algebraisch nicht verbunden, oder, was dasselbe besagt, man kann aus ihnen keinen Nulldivisor bilden.*

Wäre nämlich $\mathfrak{T}$ ein solcher Nulldivisor, so müßte eine Gleichung der Form $\mathfrak{T}^{\lambda} = \mathfrak{P}_0^{\tau_0}$ bestehen, wobei $\tau_0 = 0$ sein müßte.

Zusatz 2. *Sind in dem Büschel $\langle \mathfrak{P} \rangle$ ohne Basispunkte ζ Divisoren enthalten, die zerfallen, und ist ϑ die Gesamtzahl der in diesen enthaltenen Primteiler, so ist die Zahl der algebraisch unabhängigen Primteiler, die zu $\langle \mathfrak{P} \rangle$ gehören, gleich $\zeta - \vartheta + 1$.*

Zusatz 3. *Die Zahl der linear unabhängigen Nulldivisoren, die man aus den Primteilern bilden kann, die in den m Divisoren $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{m-1}$ aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ enthalten sind, ist $m - 1$. Z. B. sind*

$$\mathfrak{R}_i = \frac{\mathfrak{P}_i}{\mathfrak{P}_0}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{84}$$

$m - 1$ solcher Nulldivisoren.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß $\langle \mathfrak{P} \rangle$ ein Büschel ohne Basispunkte sein muß und daß die Divisoren $\mathfrak{P}$ i. a. Primteiler sein müssen.

Bemerkung 1. Daß Satz I nicht richtig ist, wenn $\langle \mathfrak{P} \rangle$ Basispunkte hat, zeigt das folgende Beispiel. K sei der Körper der rationalen Funktionen von x, y, und $\langle \mathfrak{P} \rangle$ bestehe aus den Zählern der Funktionen

$$x^2 - y^2 - \xi x,$$

wo ξ der Parameter des Büschels sein soll. Die Divisoren $\mathfrak{P}$ sind hier i. a. Primteiler. Es gibt aber zerfallende unter ihnen; so besteht der $\xi = 0$ entsprechende Divisor $\mathfrak{P}_0$ aus den Zählern von $x + y$ und $x - y$, die mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ bezeichnet seien, so daß

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2.$$

Der Divisor $\mathfrak{T} = \mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_2$ ist Nulldivisor, da $\mathfrak{T}$ gleich der Funktion $(x + y)/(x - y)$ aus K ist. Für $\mathfrak{T}$ besteht aber keine Gleichung der Form (82). Das Büschel $\langle \mathfrak{P} \rangle$ hat aber auch Basispunkte.

Bemerkung 2. Der Exponent λ in (82) kann größer als 1 sein, wie das folgende Beispiel zeigt. $K = (x, y, z)$ sei definiert durch

$$z = \sqrt[3]{(x^2 - 1)\, y} + \sqrt[3]{y(1 + y)}.$$

Man kann hier so uniformisieren, daß keine Punktprimteiler auftreten. z. B.

$$\text{bei } x = 1,\ y = 0 \quad \text{mit } x - 1 = u^3,\ y = v^3,$$
$$\text{bei } x = 1,\ y = \infty \text{ mit } x - 1 = u^3,\ y = v^{-3}.$$

K_1 sei der Körper, der die nur von x abhängenden Funktionen enthält, also hier der Körper der rationalen Funktionen von x. Das Büschel $\langle \mathfrak{P} \rangle$ besteht dann aus den Zählern der Funktionen $x - a$, wobei a den Parameter des Büschels darstellt. Die Zähler von $x + 1$ und $x - 1$ seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Sie sind die dritten Potenzen von Primteilern, die mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ bezeichnet seien, so daß $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{A}_i^3$ und

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_2} = \frac{\mathfrak{A}_1^3}{\mathfrak{A}_2^3}. \tag{85}$$

Der Divisor $\mathfrak{T} = \mathfrak{A}_1/\mathfrak{A}_2$ ist Nulldivisor. Aus (85) ergibt sich, daß hier die Zahl λ in der Darstellung (82) gleich 3 ist.

Satz II. *$\langle \mathfrak{P} \rangle$ sei ein Büschel ohne Basispunkte von ganzen Divisoren, die i. a. Primteiler sind, und K_1 sei der Körper, dessen Stellen die Divisoren von $\langle \mathfrak{P} \rangle$ eineindeutig zugeordnet sind. Ist dann w ein einfaches Integral aus K, das nur logarithmisch unendlich wird, und zwar nur längs solcher Primteiler, die zu $\langle \mathfrak{P} \rangle$ gehören, so läßt sich w als Summe eines Integrals dritter Gattung von K_1 und eines Integrals erster Gattung von K darstellen.*

Die Primteiler, längs deren w unendlich wird, seien in den m Divisoren

$$\mathfrak{P}_i \ (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

von $\langle \mathfrak{P} \rangle$ enthalten. Aus den Primteilern lassen sich genau $m - 1$ linear unabhängige Nulldivisoren bilden, z. B. die Divisoren (84). Ist daher w_i ein einfaches Integral von K, das unendlich wird wie $\log \mathfrak{R}_i$, so lassen sich nach § 9 die Konstanten c_i so bestimmen, daß

$$w_0 = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_{m-1} w_{m-1}$$

genau so unendlich wird wie w, so daß $w - w_0 = I$ ein lineares Integral erster Gattung ist. Die Integrale w_i lassen sich aber als Integrale von K_1 wählen. Ist nämlich $\mathfrak{p}_i$ die Stelle von K_1, der $\mathfrak{P}_i$ entspricht, so kann man für w_i ein Integral dritter Gattung nehmen, das zu K_1 gehört, und das an den Stellen $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_0$ logarithmisch unendlich wird mit den Residuen $+1$ und -1. Dann ist w_0 auch ein Integral aus K_1 und aus $w = w_0 + I$ folgt die Behauptung.

§ 14. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Divisor der Hauptklasse angehört.

Es soll folgender Satz bewiesen werden:

1. *$\langle \mathfrak{P} \rangle$ sei ein Büschel ohne Basispunkte von ganzen Divisoren, die bis auf endlichviele Ausnahmen Primteiler sind. Der Divisor $\mathfrak{R}$ gehe für $\mathfrak{P} = 0$ in den Divisor $\mathfrak{r}$ des Körpers $\mathfrak{P}$ über. Gilt $\mathfrak{r} \sim 1$ für jeden ganzen Divisor $\mathfrak{P}$ aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$, so ist*

$$\mathfrak{R} \sim \mathfrak{T}, \tag{86}$$

wo $\mathfrak{T}$ nur zu $\langle \mathfrak{P} \rangle$ gehörende Primteiler enthält.

2. *$\mathfrak{C}$ sei ein nicht zu $\langle \mathfrak{P} \rangle$ gehörender Primteiler. Der Divisor $\mathfrak{R}$ erfülle die unter 1. angegebenen Voraussetzungen; ferner sei er Nulldivisor und gehe für $\mathfrak{C} = 0$ in einen Divisor der Hauptklasse des Körpers $\mathfrak{C}$ über. Dann gibt es eine ganze Zahl μ so, daß*

$$\mathfrak{R}^\mu \sim 1. \tag{87}$$

3. *Der Körper, dessen Stellen die Divisoren aus $\langle \mathfrak{P} \rangle$ eineindeutig zugeordnet sind, sei K_1. Er ist Unterkörper von K und daher auch von $\mathfrak{C}$, wenn $\mathfrak{C}$ nicht zu $\langle \mathfrak{P} \rangle$ gehört. Hat $\mathfrak{R}$*

die unter 1. *und* 2. *geforderten Eigenschaften, und gilt von jeder Funktion des Körpers* $\mathfrak{C}$, *von der eine ganzzahlige Potenz zu* K_1 *gehört, daß sie selbst* K_1 *angehört, so ist*

$$\mathfrak{R} \sim 1. \tag{88}$$

Der erste Teil des Satzes stammt von Severi ([2], S. 14, Satz VI).

Der Körper K_1 sei der Körper der Funktionen von K, die nur von x abhängen. Entspricht $\mathfrak{P}$ der Stelle $\mathfrak{p}$ von K_1, so geht $\mathfrak{R}$ für $\mathfrak{P} = 0$ in einen Divisor $\mathfrak{r}(\mathfrak{p})$ des Körpers $\mathfrak{P}$ über, der durch $\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt ist, und der nach Voraussetzung eine Funktion aus $\mathfrak{P}$, also eine rationale Funktion r von y, z ist, so daß

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{p}) = r(y, z; \mathfrak{p}). \tag{89}$$

Die Koeffizienten von r hängen von $\mathfrak{p}$ ab. Da $\mathfrak{r}(\mathfrak{p})$ eindeutig durch $\mathfrak{p}$ bestimmt ist, so kann sich die Funktion r nur um einen allein von x abhängenden Faktor ändern, wenn $\mathfrak{p}$ einen geschlossenen Weg in K_1 durchläuft. Dasselbe gilt dann von den Koeffizienten von r, und zwar müssen die Koeffizienten des Zählers alle denselben Faktor aufnehmen und ebenso die des Nenners. Da es bei r auf einen nur von x abhängenden Faktor nicht ankommt, so kann man annehmen, daß sowohl im Zähler wie im Nenner ein Koeffizient gleich 1 ist. Dann darf r sich überhaupt nicht ändern, so daß die Koeffizienten Funktionen aus K_1 sein müssen. Da K_1 Unterkörper von K ist, so ist r auch Funktion aus K und werde als solche mit $R(x, y, z)$ bezeichnet.

Setzt man

$$R(x, y, z) = \mathfrak{R}\mathfrak{T}^{-1}, \tag{90}$$

so gilt für $\mathfrak{P} = 0$

$$R = r(y, z; \mathfrak{p}) \to \mathfrak{r}(\mathfrak{p}),\ \mathfrak{R} \to \mathfrak{r}(\mathfrak{p}),$$

also

$$\mathfrak{T} \to 1.$$

Es sei $\mathfrak{T} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, wo $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ganze teilerfremde Divisoren sein sollen, so daß $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ endlich ist. Da $\mathfrak{T}$ für $\mathfrak{P} = 0$ in 1 übergeht, so müssen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ für $\mathfrak{P} = 0$ zu demselben Divisor des Körpers $\mathfrak{P}$ werden; es muß also $\mathfrak{H}$ durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ gehen. Da das für jeden Divisor $\mathfrak{P}$ aus $\langle\mathfrak{P}\rangle$ gilt, so würden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ unendlich viele Schnittpunkte haben, wenn $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ einander schneiden würden. Daher haben $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$ und ebenso $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ keine Schnittpunkte, so daß $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ für $\mathfrak{P} = 0$ in 1 übergehen. Dasselbe muß dann für jeden in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ enthaltenen Primteiler gelten, da $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ganz sind. Daraus aber folgt, daß $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ und also auch $\mathfrak{T}$ nur Primteiler enthalten, die zu $\langle\mathfrak{P}\rangle$ gehören. Damit folgt aus (90) der erste Teil des Satzes.

Ist $\mathfrak{R}$ Nulldivisor, so gilt nach (90) dasselbe von $\mathfrak{T}$, da R als Funktion aus K gewiß Nulldivisor ist. Da $\mathfrak{T}$ nach dem eben Bewiesenen nur Primteiler enthält, die zu $\langle\mathfrak{P}\rangle$ gehören, so besteht nach Satz I in § 13 eine Gleichung der Form (82). Ist daher $\mathfrak{p}_i$ der Primteiler von K_1, dem $\mathfrak{P}_i$ entspricht, so geht $\mathfrak{T}^\lambda$ für $\mathfrak{C} = 0$ in den Divisor

$$\mathfrak{t}^\lambda = \mathfrak{p}_0^{\tau_0}\mathfrak{p}_1^{\tau_1} \cdots \mathfrak{p}_{m-1}^{\tau_{m-1}} \tag{91}$$

über, da K_1 Unterkörper des Körpers $\mathfrak{C}$ ist. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{t}$ gleich einer Funktion t des Körpers $\mathfrak{C}$. Nach (91) ist t^λ ein Divisor aus K_1. Die zu t^λ in bezug auf K_1 konjugierten Funktionen sind daher mit t^λ identisch. Ist also ν der Grad von $\mathfrak{C}$ in bezug auf K_1, so ist die Norm von t^λ in bezug auf K_1 gleich $t^{\lambda\nu}$. Diese ist aber eine Funktion aus K_1 und also damit auch aus K, so daß $t^{\lambda\nu} = \mathfrak{t}^{\lambda\nu} \sim 1$ als Divisor von K. D. h. es ist $\mathfrak{T}^{\lambda\nu} \sim 1$. Für $\mu = \lambda\nu$ ergibt sich daher aus (86) die Behauptung (87).

Wie sich eben ergeben hat, ist $\mathfrak{T}^\mu$ eine Funktion s aus K_1. Sie wird nicht geändert, wenn man $\mathfrak{C} = 0$ setzt. Dabei geht $\mathfrak{T}$ in die Funktion t aus $\mathfrak{C}$ über, so daß $t^\mu = s$. Nimmt man an, daß die unter 3. angegebene Voraussetzung gilt, so folgt hieraus, daß schon t selbst in K_1 liegt, also auch in K. Dann aber ist t als Funktion aus K gleich $\mathfrak{T}$, so daß $\mathfrak{T} \sim 1$. Aus (86) folgt so (88).

Nach dem Beispiel in § 13 kann der Faktor λ in $\mu = \lambda\nu$ von 1 verschieden sein. Daraus schon folgt, daß die Voraussetzung unter 3. notwendig ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß auch ν größer als 1 sein kann.

Es sei

$$\xi_1 = \sqrt{(x-e_1)(x-e_2)\,y}, \quad \xi_2 = \sqrt{(x-e_3)(x-e_4)\,y},$$
$$\xi = \sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)}, \quad z = \xi_1 + \xi_2.$$

Der Körper $K = (x, y, z)$ enthält ξ, ξ_1, ξ_2. K_1 sei der Körper, der die nur von x abhängenden Funktionen enthält; also der Körper (x, ξ). Für konstantes a zerfällt der Zähler von $x - a$, den beiden Werten entsprechend, die ξ für $x = a$ annimmt, in zwei Primteiler des Büschels $\langle\mathfrak{P}\rangle$, die i. a. verschieden sind. Sie fallen zusammen für $a = e_i$; der Zähler von $x - e_i$ sei $\mathfrak{P}_i^2$. Der Divisor $\mathfrak{T} = \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_2$ enthält nur Primteiler, die zu $\langle\mathfrak{P}\rangle$ gehören. Er ist ferner Nulldivisor, da $\mathfrak{T}^2 = (x-e_1)/(x-e_2)$ eine Funktion aus K ist. Als Primteiler $\mathfrak{C}$ sei der Zähler von $y - 1$ gewählt. Für $\mathfrak{C} = 0$ geht $\mathfrak{T}$ in eine Funktion aus $\mathfrak{C}$ über, nämlich in die Funktion $\sqrt{x-e_1}/\sqrt{x-e_2}$. Aber erst die zweite Potenz hiervon gehört K_1 an, so daß hier $\nu = 2$.

Zum Schluß sei noch an einem Beispiel gezeigt, daß man die Voraussetzung, daß $\mathfrak{R}$ (oder $\mathfrak{T}$) Nulldivisor ist, ausdrücklich den anderen hinzufügen muß. K sei definiert durch

$$z = \sqrt{1 + x^2y^2}.$$

Setzt man

$$x' = x^{-1}, \; y' = y^{-1}, \; z_1 = y'z = \sqrt{x^2 + y'^2}, \; z_2 = x'z = \sqrt{x'^2 + y^2},$$

so ist auch $K = (x, y, z_i)$. Bei $x = y' = 0$ und bei $x' = y = 0$ hat die Verzweigungskurve in bezug auf x, y einen Doppelpunkt. Diese Stellen des Körpers (x, y) sind durch je eine Elementartransformation aufzulösen. Dadurch entstehen in K zwei Punktprimteiler $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$; es gehöre $\mathfrak{V}_1$ zu $x = y' = 0$ und $\mathfrak{V}_2$ zu $x' = y = 0$. $\mathfrak{V}_1$ ist in $\mathfrak{L}_0$ und $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{V}_2$ in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}_0$ enthalten, und zwar in der ersten Potenz. Außerdem seien noch folgende Primteiler durch die zugehörigen Abbildungen definiert:

$$\mathfrak{A}_1 : x \to 0, \; z \to +1, \quad \mathfrak{A}_2 : x \to 0, \; z \to -1,$$
$$\mathfrak{B}_1 : y \to 0, \; z \to +1, \quad \mathfrak{B}_2 : y \to 0, \; z \to -1.$$

K_1 sei der Körper der rationalen Funktionen von x und K_2 der der rationalen Funktionen von y. Die den Stellen von K_1 und K_2 zugeordneten ganzen Divisoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ mögen die Büschel $\langle\mathfrak{P}\rangle$ und $\langle\mathfrak{Q}\rangle$ bilden. Die $\mathfrak{P}$ und die $\mathfrak{Q}$ sind i. a. Primteiler. Ausnahmen sind z. B. die Zähler $\mathfrak{L}_0$ und $\mathfrak{M}_0$ von x und y; es ist

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{V}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \; \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{V}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2.$$

Wir betrachten die Funktion

$$H = \frac{z-1}{z+1} = \frac{\mathfrak{A}_1^2\mathfrak{B}_1^2}{\mathfrak{A}_2^2\mathfrak{B}_2^2} \tag{92}$$

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ seien je ein Primteiler aus $\langle\mathfrak{P}\rangle$ und $\langle\mathfrak{Q}\rangle$. Für $\mathfrak{P} = 0$ geht $\mathfrak{A}_i$ in 1 über und für $\mathfrak{Q} = 0$ wird $\mathfrak{B}_i$ zu 1. $\mathfrak{B}_i$ gehe für $\mathfrak{P} = 0$ in $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{A}_i$ für $\mathfrak{Q} = 0$ in $\mathfrak{a}_i$ über. Dann gilt

$$H \to \frac{\mathfrak{b}_1^2}{\mathfrak{b}_2^2} = \mathfrak{r}_1 \quad \text{für} \quad \mathfrak{P} = 0, \quad H \to \frac{\mathfrak{a}_1^2}{\mathfrak{a}_2^2} = \mathfrak{r}_2 \quad \text{für} \quad \mathfrak{Q} = 0.$$

Da $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ aus einer Funktion von K hervorgehen, so ist $\mathfrak{r}_1 \sim 1$ in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}_2 \sim 1$ in $\mathfrak{Q}$. Der Divisor $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}_1^2/\mathfrak{A}_2^2$ wird für $\mathfrak{P} = 0$ konstant, also ~ 1 und für $\mathfrak{Q} = 0$ zu $\mathfrak{r}_2 \sim 1$. Da das für alle $\mathfrak{P}$ und für alle $\mathfrak{Q}$ gilt, so muß nach dem ersten Teil des in diesem Paragraphen bewiesenen Satzes $\mathfrak{R}$ sowohl einem Divisor äquivalent sein, der nur Primteiler enthält, die zu $\langle\mathfrak{P}\rangle$ gehören, wie auch einem mit nur Primteilern, die zu $\langle\mathfrak{Q}\rangle$ gehören. Daß das tatsächlich der Fall ist, ergibt sich einmal aus der Definition von $\mathfrak{R}$ und dann aus der Gleichung (92), nach der $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{B}_2^2/\mathfrak{B}_1^2$. Wählt man für $\mathfrak{C}$ irgendeinen Primteiler $\mathfrak{Q}$ aus $\langle\mathfrak{Q}\rangle$, so geht, wie wir gesehen haben, $\mathfrak{R}$ für $\mathfrak{C} = 0$ in einen Divisor der Hauptklasse von $\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}$ über. Es ist aber gewiß keine Potenz von $\mathfrak{R}$ in K_1 enthalten. Denn sie müßte eine rationale Funktion von x sein, die für $x = 0$ gleichzeitig 0 und ∞ würde. Daher kann $\mathfrak{R}$ kein Nulldivisor sein. Man findet auch, worauf hier nicht eingegangen sei, daß $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}) = -8$.

Literatur.

1. F. Severi, Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie algebrica, Rendiconti Palermo **20** (1905).

2. F. Severi, Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche, Ann. di Matematica (3) **12** (1905).

3. F. Severi, Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl' integrale di Picard, Rendiconti Palermo **21** (1906).

4. F. Severi, Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica, Math. Ann. **62** (1906).

5. G. Castelnuovo, Sugli integrale semplici appartenenti ad una superficie irregolare, Rend. della R. Accademia dei Lincei (5) **14** (1905); an drei Stellen.

6. E. Picard et G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes **1**—**2** (Paris, 1897—1906).

7. E. Kohl, Algebraische Korrespondenzen, Dissertation Halle (1929).

8. H. W. E. Jung, Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen, Journal für reine und angewandte Mathematik **168** (1932).

Eingegangen 17. Januar 1939.

Berichtigungen.

Band 179, S. 16, Zeile 1: K_n statt k_n
Zeile 5: Blichfeldt statt Blickfeldt.
A. Scholz.

Band 180, S. 116, Zeile 14: $C = A \cup (B \cap C)$ statt $C = A \cup (B \cup C)$.
E. George.

Inhaltsverzeichnis der Bände 171—180.

	Band	Seite
Aumann, G. (*München*), Vollkommene Funktionalmittel und gewisse Kegelschnitteigenschaften	176.	49—55
— (*Frankfurt/M.*), Über lokale Ordnungseigenschaften der konformen Abbildungen	178.	187—191
Barna, B. (*Debrecen*), Ein Limessatz aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels	172.	86—88
— —, Zur elementaren Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels	178.	129—134
Beck, H. (*Bonn*), Eine Cremonasche Raumgeometrie	175.	129—158
Behrbohm, H. und **Rédei, L.** (*Göttingen*), Der Euklidische Algorithmus in quadratischen Körpern	174.	192—205
Bergmann, St. (*Tomsk*), Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. II.	172.	89—128
Bögel, K. (*Halberstadt*), Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation	173.	5—30
— —, Berichtigung zu der Arbeit: Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen, ds. Journal Band 170, S. 197—217	173.	30
Boerner, H. (*München*), Ein „belastetes" Variationsproblem	171.	120—127
Braun, H. (*Frankfurt/M.*), Über die Zerlegung quadratischer Formen in Quadrate	178.	34—64
Brendel, M. (*Freiburg/Br.*), Über eine neue Methode zur Ermittlung der Planetenstörungen	172.	219—225
Broggi, U. (*Milano*), Su due sistemi associati di infinite equazioni lineari	176.	25—30
Brühl, G. (*Halle*), Definition von Primteilern im rationalen Körper dreier unabhängiger Veränderlichen	179.	69—89
Damköhler, W. (*München*), Struktur der geschlossenen rektifizierbaren Kurven	177.	37—54
Davenport, H. (*Cambridge*) und **Hasse, H.** (*Göttingen*), Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen	172.	151—182
Denk, F. (*Erlangen*), Über den Aufbau der Permutationen geordneter Elemente	176.	18—24
— —, Über die Eindeutigkeit der Zerlegung der Permutationen geordneter Elemente	178.	127—128
Deuring, M. (*Leipzig*), Zetafunktionen quadratischer Formen	172.	226—252
— —, Neuer Beweis des Bauerschen Satzes	173.	1—4
— —, Über den Hauptsatz der Algebrentheorie	175.	63—64
— —, Einbettung von Algebren in Algebren mit kleinerem Zentrum	175.	124—128
— —, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. I.	177.	161—191
Dingeldey, F. (*Darmstadt*), Zu einem Satze von Hazzidakis über gewisse Systeme linearer Differentialgleichungen	171.	128—130
Doetsch, G. (*Freiburg/Br.*), Über die Existenz der Darbouxschen Integrale und verwandter Begriffe	172.	183—192

	Band	Seite
Egerváry, E. (*Budapest*), Über ein Minimumproblem der Elementargeometrie	178.	174—186
Eichler, M. (*Halle*), Untersuchungen in der Zahlentheorie der rationalen Quaternionenalgebren	174.	129—159
— —, Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren	176.	192—202
— (*Göttingen*), Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen.	179.	227—251
Engel, F. (*Gießen*), Eine neue Darstellung der Integrationstheorie der vollständigen Systeme	180.	73—85
Epstein, P. (*Frankfurt/M.*), Zur Auflösbarkeit der Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$	171.	243—252
Fitting, H. (*Königsberg/Pr.*), Der Normenbegriff für die Ideale eines Ringes beliebiger Struktur	178.	107—122
Franz, W. (*Marburg*), Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern	171.	149—161
— —, Die Teilwerte der Weberschen Tau-Funktion	173.	60—64
— —, Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen	173.	174—184
— —, Über die Torsion einer Überdeckung	173.	245—254
— —, Torsionsideale, Torsionsklassen und Torsion	176.	113—124
Garver, R. (*Los Angeles*), A note on Bieberbach's trisection method	173.	243—244
George, E. (*Schneidemühl*), Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier	180.	110—120
— —, Berichtigung dazu	180.	244
— —, Ein Beitrag zur Theorie der geordneten Mengen	180.	191—196
Graeser, E. (*Göttingen*), Potentialströmungen in Kanalsystemen	180.	86—96
Grün, O. (*Berlin*), Über Substitutionsgruppen im Galoisfeld $G(p^l)$	171.	170—172
— —, Beiträge zur Gruppentheorie. I.	174.	1—14
Haenzel, G. (*Karlsruhe*), Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz in ihrer Beziehung zu den quadratischen Cremonatransformationen und den Differentialgleichungen erster Ordnung	173.	91—113
— —, Die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes, gegründet auf seine Polarentheorie	174.	226—236
— —, Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. II.	175.	169—181
— und **Reutter, F.** (*Karlsruhe*), Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. III.	178.	229—252
Hasse, H. (*Marburg*), Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper	172.	37—54
— —, Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper	172.	55—64
— —, Existenz separabler zyklischer unverzweigter Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über elliptischen Funktionenkörpern der Charakteristik p	172.	77—85
— (*Göttingen*), Elementarer Beweis des Hauptsatzes über ternäre quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten	172.	129—132
— —, Theorie der höheren Differentiale in einem algebraischen Funktionenkörper mit vollkommenem Konstantenkörper bei beliebiger Charakteristik	175.	50—54
— —, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I. Die Struktur der Gruppe der Divisorenklassen endlicher Ordnung	175.	55—62
— —, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper II. Automorphismen und Meromorphismen. Das Additionstheorem	175.	69—88
— —, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper III. Die Struktur des Meromorphismenrings. Die Riemannsche Vermutung	175.	193—208
— —, Über die Diskriminante auflösbarer Körper von Primzahlgrad	176.	12—17
— —, Die Gruppe der p^n-primären Zahlen für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ von p	176.	174—183
— —, s. Davenport, H. und Hasse, H.		

	Band	Seite
Hasse, H. *(Göttingen)* und **Schilling, O.** (*Princeton*), Die Normen aus einer normalen Divisionsalgebra über einem algebraischen Zahlkörper	174.	248—252
— und **Schmid, H. L.** (*Göttingen*), Über die Ausnahmeklassen bei abstrakten hyperelliptischen Funktionenkörpern	176.	184—188
— — und **Schmidt, F. K.** *(Jena)*, Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten	177.	215—237
Haupt, O. (*Erlangen*), Zur Reinhardtschen Kennzeichnung der Kreisbogen	174.	185—187
— —, Über ebene Punktmengen mit überall unendlicher Krümmung	175.	221—223
— —, Zur Differentialgeometrie k-dimensionaler Gebilde im R_n	176.	95—111
— —, Berichtigung zur Arbeit: Über Kontinua von endlicher Relativordnung. Crelles Journal 167 (1931)	176.	112
— —, Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen (Erste Mitteilung.)	178.	14—28
— —, Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen (Zweite Mitteilung.)	180.	44—72
Heffter, L. (*Freiburg/Br.*), Vom Cauchyschen Integralsatz zur Cauchyschen Integralformel	175.	240—245
Hensel, K. (*Marburg*), Über den Zusammenhang zwischen den Kongruenzgruppen eines algebraischen Körpers für alle Potenzen eines Primteilers als Modul	177.	82—93
Holzer, L. (*Graz*), Takagische Klassenkörpertheorie, Hassesche Reziprozitätsformel und Fermatsche Vermutung	173.	114—124
Iyanaga, S. (*Paris*), Zur Theorie der Geschlechtermoduln	171.	12—18
Jolles, St. (*Berlin*), Die Hauptachsenflächen der Büschelscharen aus den einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen Flächen zweiten Grades	172.	1—24
— —, Die charakteristischen Hauptachsen der einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthaltenen scheitelrechten Hyperboloide	178.	65—106
Jonas, H. (*Berlin-Steglitz*), Eine neue Eigenschaft der pseudosphärischen Strahlenkongruenzen	175.	159—168
— —, Über den Zusammenhang zweier Klassen viergliedriger Laplacescher Zyklen	179.	22—36
Jung, H. W. E. (*Halle*), Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen	180.	97—109
— —, Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. I.	180.	219—244
Kapferer, H. (*Freiburg/Br.*), Eliminanten bei Gleichungssystemen zweier Variabeln	173.	79—90
Karamata, J. (*Beograd*), Ein Konvergenzsatz für trigonometrische Integrale	178.	29—33
Keller, O. H. (*Berlin*), Ein Satz über die lückenlose Erfüllung des 5- und 6-dimensionalen Raumes mit Würfeln	177.	61—64
Kober, H. (*Breslau*), Transformationen einer bestimmten Besselschen Reihe sowie von Potenzen der Riemannschen ζ-Funktion und von verwandten Funktionen	173.	65—78
— —, Funktionen, die den Potenzen der Riemannschen Zetafunktion verwandt sind, und Potenzreihen, die über den Einheitskreis nicht fortsetzbar sind	174.	206—225
Köthe, G. (*Münster*), Lösbarkeitsbedingungen für Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten	178.	193—213
— — und **Toeplitz, O.** (*Bonn*), Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen	171.	193—226
Kowalewski, G. (*Dresden*), Zur natürlichen Geometrie der irreduziblen G_7 von Berührungstransformationen	180.	197—218
Krull, W. (*Erlangen*), Über einen Irreduzibilitätssatz von Bertini	177.	94—104
— —, Dimensionstheorie in Stellenringen	179.	204—226

	Band	Seite
Lamla, E. (*Berlin*), Über eine Verallgemeinerung der Hillschen Determinante	179.	134—142
Lemke, H. (*Berlin*), Über eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung	180.	141—188
Lettenmeyer, F. (*München*), Über die sogenannte Hospitalsche Regel	174.	246—247
Lorey, W. (*Frankfurt/M.*), Josef Louis Lagrange. Zur 200. Wiederkehr seines Geburtstages am 25. 1. 1936	175.	224—239
Lubelski, S. (*Warschau*), Über Klassenzahlrelationen quadratischer Formen in quadratischen Körpern	174.	160—184
— —, Zur Gaußschen Kompositionstheorie der binären quadratischen Formen	176.	56—60
Lutz, E. (*Strasbourg*), Sur l'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps p-adiques	177.	238—247
Magnus, W. (*Frankfurt/M.*), Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren	177.	105—115
Maruhn, K. (*Berlin*), Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender inhomogener Flüssigkeiten	174.	68—72
Mayer, A. E. (*Wien*), Längste konvexe Kurven, die einem gegebenen konvexen Polygon umschrieben sind	174.	125—128
Mises, R. v. (*Istanbul*), Über allgemeine Quadraturformeln	174.	56—67
Moriya, M. (*Sapporo*), Abelsche Erweiterungen über algebraischen Funktionenkörpern einer Unbestimmten mit absolut-algebraischem Konstantenkörper	179.	143—147
Moufang, R. (*Frankfurt/M.*), Einige Untersuchungen über geordnete Schiefkörper	176.	203—223
Sz. Nagy, J. von (*Szeged*), Zur Theorie der algebraischen und gewisser transzendenten Gleichungen	172.	25—36
— —, Über Raumkurven vom Maximalindex	177.	197—214
Nakayama, T. (*Osaka*), Divisionsalgebren über diskret bewerteten perfekten Körpern	178.	11—13
Neiß, F. (*Berlin*), Über die Unmöglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Winkelhalbierenden	177.	129—133
Neumer, W. (*Worms*), Die allgemeinste mit der projektiven G_8 der Ebene ähnliche Gruppe von Berührungstransformationen	173.	125—159
— —, Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. I	176.	224—249
— —, Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. II	177.	13—36
— —, Die gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung, die lineare homogene Form erhalten können. III	177.	65—81
— —, Über gewisse Beziehungen, welche bei der allgemeinsten Differentialgleichung dritter Ordnung stattfinden, die durch Berührungstransformationen in $y''' = 0$ übergeführt werden kann	178.	214—228
— —, Die allgemeinsten Differentialgleichungen vierter und fünfter Ordnung, welche durch Berührungstransformation in die Differentialgleichung der Parabeln und der Kegelschnitte übergeführt werden können	179.	193—203
Nevanlinna, R. (*Helsinki*), Über das alternierende Verfahren von Schwarz	180.	121—128
Nöbeling, G. (*Erlangen*), Über die topologische Struktur der Mengen endlicher Ordnung	180.	129—140
Oehlert, M. (*Merseburg*), Über die Definition der Zeuthen-Segreschen Invariante	171.	42—54
Peschl, E. (*Jena*), Zur Theorie der schlichten Funktionen	176.	61—94
Petterson, E. L. (*Stockholm*), Über einen Satz von Ö. Ore	172.	217—218
— —, Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome nach einem Primzahlmodul	175.	209—220

	Band	Seite
Plamitzer, A. (*Lwów*), Erzeugnisse einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n-ten Grades zwischen Grundgebilden zweiter Stufe	171.	173—192
— —, Über Flächen $(2n+1)$-ter Ordnung mit einer n-fachen kubischen Raumkurve	172.	193—216
Rasch, G. (*Kopenhagen*), Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals	171.	65—119
Rédei, L. (*Mezötur*), Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper	171.	55—60
— —, Eine obere Schranke der Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper	171.	61—64
— —, Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper	171.	131—148
— (*Göttingen*), Über die Pellsche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$	173.	193—221
— —, Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper	174.	15—55
— —, Berichtigungen zu zwei früheren Arbeiten	174.	55
— —, s. Behrbohm, H. und Rédei, L.		
— (*Budapest*), Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper. I	180.	1—43
Reichardt, H. (*Frankfurt/M.*), Die Diskriminante einer normalen einfachen Algebra	173.	31—34
— (*Jena*), Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung	177.	1—5
— (*Leipzig*) und **Wegner, U.** (*Heidelberg*), Arithmetische Charakterisierung von algebraisch auflösbaren Körpern und Gleichungen von Primzahlgrad	178.	1—10
Reidemeister, K. (*Marburg*), Überdeckungen von Komplexen	173.	164—173
Rembs, E. (*Berlin*), Die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel	173.	160—163
Reutter, F. (*Karlsruhe*), s. Haenzel, G. und Reutter, F.		
Rohrbach, H. (*Göttingen*), Ein Identitätssatz für Polynome	177.	55—60
— —, Beweis einer zahlentheoretischen Ungleichung	177.	193—196
— —, Vereinfachter Beweis eines Identitätssatzes für Polynome	180.	189—190
Schilling, O. F. G. (*Apolda*), Über die Darstellungen endlicher Gruppen	174.	188
— (*Princeton*), Zur algebraischen Theorie der Funktionenkörper mehrerer Variabler	175.	1—5
— —, Einheitentheorie in rationalen hyperkomplexen Systemen	175.	246—251
— —, s. Hasse, H. und Schilling, O.		
Schmid, H. L. (*Göttingen*), Zyklische algebraische Funktionenkörper vom Grade p^n über endlichem Konstantenkörper der Charakteristik p	175.	108—123
— —, Zur Arithmetik der zyklischen p-Körper	176.	161—167
— —, Relationen zwischen verallgemeinerten Gaußschen Summen	176.	189—191
— —, s. Hasse, H. und Schmid, H. L.		
— (*München*), Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik	179.	5—15
— und **Witt, E.** (*Göttingen*), Unverzweigte abelsche Körper vom Exponenten p^n über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p	176.	168—173
Schmidt, A. (*Weimar*), Neuer Beweis eines Hauptsatzes über Bestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungssysteme	179.	1—4
Schmidt, F. K. (*Göttingen*), Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich	171.	162—169
— (*Jena*), Berichtigung zu der Arbeit: Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten. Crelles Journal 177 (1937), S. 215—237	178.	128
— —, s. Hasse, H. und Schmidt, F. K.		
Schmidt, H. (*Jena*), Über einige neuere Beispiele zur Wertverteilungslehre	176.	250—252

	Band	Seite
Schmidt, R. (*Kiel*), Die allgemeine Newtonsche Quadraturformel und Quadraturformeln für Stieltjesintegrale	173.	52—59
Schneider, Th. (*Frankfurt/M.*), Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. Transzendenz von Potenzen	172.	65—69
— —, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen II. Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen	172.	70—74
— —, Über die Approximation algebraischer Zahlen	175.	182—192
Scholz, A. (*Freiburg*) und **Taussky, O.** (*Wien*), Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär-quadratischer Zahlkörper: ihre rechnerische Bestimmung und ihr Einfluß auf den Klassenkörperturm	171.	19—41
— (*Kiel*), Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen. I	175.	100—107
— —, Minimaldiskriminanten algebraischer Zahlkörper	179.	16—21
— —, Berichtigung dazu	180.	244
Schulz, W. (*Berlin*), Über die Galoissche Gruppe der Hermiteschen Polynome	177.	248—252
Steck, M. (*München*), Grundlegung einer Theorie der reellen Inzidenzabbildungen in endlichen projektiven Geometrien. I	179.	37—64
— —, Zur Theorie der reellen Inzidenzabbildungen. II	179.	148—192
Strubecker, K. (*Wien*), Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes	178.	135—173
Suetuna, Z. (*Tokyo*), Abhängigkeit der L-Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern	177.	6—12
Sugawara, M. (*Tokyo*), Zur Theorie der komplexen Multiplikation. I	174.	189—191
— —, Zur Theorie der komplexen Multiplikation. II	175.	65—68
Taussky, O. (*Wien*), s. Scholz, A. und Taussky, O.		
Teichmüller, O. (*Göttingen*), Operatoren im Wachsschen Raum	174.	73—124
— —, Differentialrechnung bei Charakteristik p	175.	89—99
— —, Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper	176.	141—152
— —, Zerfallende zyklische p-Algebren	176.	157—160
Toeplitz, O. (*Bonn*), s. Köthe, G. und Toeplitz, O.		
Vassiliou, Ph. (*Saloniki*), Über affektlose Gleichungen	176.	45—48
van der Waerden, B. L. (*Leipzig*), Elementarer Beweis eines zahlentheoretischen Existenztheorems	171.	1—3
— —, Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden	179.	65—68
Wagner, H. (*Göttingen*), Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten	175.	6—49
Watson, G. N. (*Birmingham*), Ramanujans Vermutung über Zerfällungsanzahlen	179.	97—128
Weber, A. (*Köln*), Isomorphismus maximaler Matrizenringe	171.	227—242
Wegner, U. (*Darmstadt*), Über das Verhalten der Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hinsichtlich ihrer Gruppe	173.	185—190
— —, Bestimmung eines auflösbaren Körpers von Primzahlgrad aus der Form seiner Diskriminante	176.	1—11
— (*Heidelberg*), s. Reichardt, H. und Wegner, U.		
Weil, A. (*Straßburg*), Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen	179.	129—133
Weiss, E. A. (*Bonn*), Zur Theorie des syzygetischen Büschels von Kurven 3. Ordnung	173.	222—232
— —, Die Autopolokoniken der singulären Kurven 3. Ordnung	173.	233—242
— —, Das Linienelement als singuläre Punktreihe	177.	116—128
— —, Das Linienelement als singuläre Punktreihe. (Zweite Mitteilung.)	178.	123—126
— —, Die elliptische Normalkurve sechster Ordnung als Tripelreihe	179.	90—96
Weyrich, R. (*Brünn*), Über einige Randwertprobleme, insbesondere der Elektrodynamik	172.	133—150

	Band	Seite
Witt, E. (*Göttingen*), Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper	171.	4—11
— —, Über die Invarianz des Geschlechts eines algebraischen Funktionenkörpers	172.	75—76
— —, Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper	173.	43—51
— —, Zwei Regeln über verschränkte Produkte	173.	191—192
— —, Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^l	174.	237—245
— —, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern	176.	31—44
— —, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n. Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p	176.	126—140
— —, Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern	176.	153—156
— —, Treue Darstellung Liescher Ringe	177.	152—160
— —, s. Schmid, H. L. und Witt, E.		
Wolff, H. (*Berlin*), Über harmonikale Abbildungen	173.	35—42
— —, Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden	177.	134—151
Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis 1934	172.	192
Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis 1937	177.	247
Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1938	175.	252
Ein großer wissenschaftlicher Preis	177.	192
Übergabe der Schriftleitung des Journals für die reine und angewandte Mathematik von K. Hensel an H. Hasse	175.	vor S. 1
Achter Wettbewerb der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V. Wissenschaftlicher Wettbewerb 1938	178.	192
Wissenschaftliche Wettbewerbe der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V.	179.	252